UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	IN 227 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	5. desember 2001
Tid for eksamen:	9.00 – 15.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og skrevne

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 12 delspørsmål vektlegges likt.

Løsningsforslag

Oppgave 1 Gauss-Seidel

I denne oppgaven skal vi anvende Gauss-Seidels metode på ligningssystemet $Ax = b$ hvor

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1a

Utfør en iterasjon når du starter med $x^{(0)} = 0$.

Løsning: Gauss-Seidels metode på komponentform kan skrives

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{1}{5} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{5}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{5}x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

Med $x^{(0)} = 0$ og $k = 0$ finner vi

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}, \quad x_2^{(1)} = \frac{2}{25}, \quad x_3^{(1)} = \frac{16}{125}.$$

(Fortsettes på side 2.)

1b

Det kan vises at Gauss-Seidels metode kan skrives $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ *hvor*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 4/25 & 19/25 \\ 0 & 32/125 & 77/125 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Beregn $||B||_\infty$ *og forklar hvorfor Gauss-Seidels metode anvendt på problemet (1) konvergerer uansett valg av startverdi.*

Løsning: Vi finner

$$||B||_\infty = \max\{\frac{4}{5}, \frac{23}{25}, \frac{109}{125}\} = \frac{23}{25}.$$

I følge kapittel 8 s. 2 i Leon's tilleggsnotat så konvergerer en metode på formen $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ for alle startverdier $x^{(0)}$ dersom $||B|| < 1$ for en matrisenorm. Utsagnet i oppgaven følger nå siden $||B||_\infty = \frac{23}{25} < 1$.

1c

Vis at $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ *hvor* B *er gitt ved (2).*

Løsning: Vi uttrykker alle ukjente på nivå $(k+1)$ ved ukjente på nivå (k). Fra **1a**

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{1}{5} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{5}x_3^{(k)} \\
&= \frac{4}{25}x_2^{(k)} + \frac{19}{25}x_3^{(k)} + \frac{2}{25} \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{4}{25}x_2^{(k)} + \frac{19}{25}x_3^{(k)} + \frac{2}{25}\right) \\
&= \frac{32}{125}x_2^{(k)} + \frac{77}{125}x_3^{(k)} + \frac{16}{125}
\end{aligned}$$

På matriseform får vi $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ hvor B er gitt i **1b**.

Oppgave 2 Oppdatering av invers

La $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *være en ikkesingulær matrise med invers* $C = A^{-1}$ *og la* $a \in \mathbb{R}^n$ *være en søylevektor. La* $1 \le i \le n$ *og definer* $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ *som matrisen som fremkommer ved å bytte ut* i*-te rad i* A *med* a^T*. Vi kan uttrykke* B *på formen*

$$B = A - e_i(e_i^T A - a^T)$$

hvor $e_i \in \mathbb{R}^n$ *er* i*-te søyle i identitetsmatrisen* I*. Vi skal i denne oppgaven komme frem til et kriterium for når* B *er ikkesingulær og deretter bestemme den inverse* $F = B^{-1}$ *til* B *uttrykt ved den inverse* C *til* A*.*

(Fortsettes på side 3.)

2a

Forklar hvorfor $B = (I - uv^T)A$ for passelige valg av søylevektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Løsning: Vi har

$$B = A - e_i(e_i^T A - a^T) = (I - e_i(e_i^T A - a^T)A^{-1})A = (I - uv^T)A$$

hvor $u = e_i$ og $v^T = (e_i^T A - a^T)A^{-1} = e_i^T - a^T C$. Vi ser at $u = e_i$ og $v = e_i - C^T a$ er søylevektorer siden en matrise ganger en søylevektor er en søylevektor.

2b

Vis at dersom

$$\alpha = a^T C e_i \neq 0 \tag{3}$$

så har B en invers gitt ved

$$F = B^{-1} = C(I + \frac{1}{\alpha} e_i(e_i^T - a^T C)). \tag{4}$$

Hint: Dersom $v^T u \neq 1$ har matrisen $I - uv^T$ en invers på formen $I + \frac{1}{\alpha} uv^T$ for en $\alpha \in \mathbb{R}$.

Løsning: Viser først at dersom $\alpha = 1 - v^T u \neq 0$ er $I + \frac{1}{\alpha} uv^T$ en invers til $I - uv^T$. Vi finner

$$\begin{aligned}(I - uv^T)(I + \frac{1}{\alpha} uv^T) &= I - uv^T + \frac{1}{\alpha} uv^T - \frac{1}{\alpha} uv^T uv^T \\ &= I + (-1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{v^T u}{\alpha}) uv^T = I\end{aligned}$$

Dette gir

$$B^{-1} = ((I - uv^T)A)^{-1} = A^{-1}(I - uv^T)^{-1} = C(I + \frac{1}{\alpha} uv^T),$$

hvor

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - v^T u = 1 - (e_i^T - a^T C)e_i \\ &= 1 - 1 + a^T C e_i = a^T C e_i \neq 0.\end{aligned}$$

Det gir at B^{-1} eksisterer og

$$F = B^{-1} = C(I + \frac{1}{\alpha} uv^T) = C(I + \frac{1}{\alpha} e_i(e_i^T - a^T C)).$$

(Fortsettes på side 4.)

2c

La $B^{-1} = F = (f_1, \dots, f_n)$ og $A^{-1} = C = (c_1, \dots, c_n)$ være partisjonert ved søyler. Finn en formel for f_i uttrykt ved c_i og for f_j uttrykt ved c_j og f_i for $j \neq i$. Er det noen fordel å beregne F på denne måten fremfor å invertere B direkte? Begrunn svaret.

Løsning: Fra **2b** finner vi

$$\begin{aligned} f_i &= C(I + \frac{1}{\alpha}e_i(e_i^T - a^T C))e_i = c_i + \frac{1}{\alpha}Ce_i(1 - a^T Ce_i) \\ &= c_i + c_i\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{c_i}{\alpha}. \end{aligned}$$

For $j \neq i$ er $e_i^T e_j = 0$ slik at

$$f_j = C(e_j + \frac{1}{\alpha}e_i(-a^T Ce_j)) = c_j - \frac{1}{\alpha}c_i a^T C_j = c_j - (a^T c_j)f_i.$$

2d

Skriv et matlab *function F=oppdater(C,i,a)* som tester om kravet (3) er oppfylt og bruker formlene du fant i oppgave **2c** til å beregne F dersom $\alpha \neq 0$.

Løsning:

```
function F=oppdater(C,i,a)
% Beregner F = C(I + e_i(e_i^T - a^T C))/α ved formlene i 2c;
alpha=a'*C(:,i);
if alpha =/= 0
   F(:,i)=C(:,i)/alpha;
   for j=1:i-1,i+1:n
       F(:,j)=C(:,j)-(a'*C(:,j))*F(:,i)r;
   end
end
```

Oppgave 3 En iterativ metode

I denne oppgaven er $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ en positiv definitt matrise og $f \in \mathbb{R}^n$ en søylevektor. Vi skal studere en iterative metode for å løse ligningssystemet $Ax = f$. Metoden har formen

$$x_{k+1} = x_k + \alpha r_k, \quad \text{hvor} \quad r_k = f - Ax_k \tag{5}$$

er residualet i k'te iterasjon. Videre er α en positiv konstant som vi skal bestemme slik at metoden får gode konvergensegenskaper. Vi betegner egenverdiene til A med $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ og antar at

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Vi setter også

$$B = I - \alpha A.$$

(Fortsettes på side 5.)

3a

Vis at $x_{k+1} = Bx_k + c$ for en vektor c og at $r_{k+1} = Br_k$ for $k \geq 0$.

3b

Skisser en algoritme som starter med $x_0 = 0$ og til gitt $\epsilon > 0$ bestemmer antall iterasjoner K og tilhørende approksimasjon x_K slik at $||r_K||_2^2/||r_0||_2^2 \leq \epsilon^2$.

3c

Anta at vi anvender metoden på matrisen A_p fra det diskrete Poisson problemet. Med $n = m^2$ er elementene $a_{i,j}$ i A_p gitt ved

$$\begin{aligned}
a_{i,i} &= 4, && i = 1, \ldots, n \\
a_{i+1,i} = a_{i,i+1} &= -1, && i = 1, \ldots, n-1, \quad i \neq m, 2m, \ldots, (m-1)m \\
a_{i+m,i} = a_{i,i+m} &= -1, && i = 1, \ldots, n-m \\
a_{i,j} &= 0, && \text{ellers.}
\end{aligned}$$

Omtrent hvor mange flops vil hver iterasjon i algoritmen kreve dersom n er stor?

La nå igjen A være en vilkårlig positiv definitt matrise.

3d

Bestem egenverdiene $\mu_1, \ldots, \mu_n$ til B uttrykt ved egenverdiene til A og vis at metoden konvergerer dersom $0 < \alpha < 2/\lambda_n$.

3e

La nå $\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. Vis at

$$\frac{||x_k - x||_2}{||x_0 - x||_2} \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k, \quad k \geq 0$$

hvor $\kappa = \text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

Lykke til!