UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i	Inf-Mat3350 —
Eksamensdag:	15. desember 2003
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgåvesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatne hjelpemiddel:	Ingen

Kontroller at oppgåvesettet er komplett før
du tek til å svare på spørsmåla.

Oppgavesettet består av 6 deloppgåver med tilnærma same vekt.

Oppgåve 1

Slå fast om påstanden er gal eller sann. Grunngje svaret.

1a

Singulærverdiane til matrisa

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

er alle positive?

Oppgåve 2 Nokre ulikskapar

2a

La $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ha eigenverdiar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Vis at for einkvar operatornorm $\|A\|$ gjeld

$$\max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| \le \|A\|.$$

Nemn ei klasse av matriser og ein operatornorm der vi har likskap.

2b

La R vera ei 2×2 matrise på forma

$$R = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

(Framhald på side 2.)

der $c, s \in \mathbb{R}$ med $c^2 + s^2 = 1$. Syn at $\operatorname{cond}_p(R) := \|R\|_p \|R^{-1}\|_p \leq 2$ for $p = 1, \infty$ og at vi har likskap for eit passande val av c og s.

Oppgåve 3 Lineært likningssystem

I denne oppgåva skal vi nytte plane rotasjonar til å løyse eit lineært likningssystem $Ax = b$ som er nesten øvre triangulært. Vi går ut frå at alle elementa under diagonalen er null unnateke dei i siste rad som alle kan vera ulik null. Vi går også ut frå at for eit positivt heiltal n at $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ er ikkje-singulær og $b \in \mathbb{R}^n$. Som illustrasjon, for $n = 5$ har A forma

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Vi skal redusere A til øvre triangulær form ved ein serie av plane rotasjoner på forma

$$R = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

der $c, s \in \mathbb{R}$ med $c^2 + s^2 = 1$.

3a

Skrive ein Matlab `function [c,s]=rot(a,b)` som til gitte tal $a, b \in \mathbb{R}$ finn ein plan rotasjon slik at

$$\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{1}$$

der $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ kun blir rekna ut i programmet. Viss $a = b = 0$ set vi $c = 1$ og $s = 0$. r skal reknas ut på ein spesiell måte. Vi set $r = t\sqrt{(a/t)^2 + (b/t)^2}$ der $t = |a| + |b|$. Forklar kvifor denne måten å rekna ut r på kan vera gunstig for å unngå underflow og overflow.

(Framhald på side 3.)

Vi set $A_1 = A$ og $A_{k+1} = R_k A_k$ for $k = 1, \ldots, n-1$ der R_k er ein plan rotasjon som nyttar posisjon (k,k) i A_k til å framskaffe ein null i posisjon (n,k) i A_{k+1} for $k = 1, \ldots, n-1$. R_k skiller seg frå identitetsmatrisa kun i rad og kolonne k og n og har forma

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & s \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -s & 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$$

3b

Grunngje kvifor A_n blir øvre triangulær. Skriv ein Matlab `function x=rotsolve(A,b)` som reknar ut $U = A_n$ og $c = R_{n-1} \cdots R_1 b$ og så finn x ved tilbakesubstitutsjon. Vi lagrer alle A_k-ene i A ettersom dei vert rekna ut og vi går ut frå at det er gitt ein `function x=utrisolve(U,c)` som løyser det øvre triangulære systemet $Ux = c$ ved tilbakesubstitusjon. Du skal ikkje skrive innmaten i `utrisolve`.

3c

Vi kunne også løyst vårt spesielle system $Ax = b$ på andre måtar. Vi skal her samanlikne med Gausseliminasjon utan pivotering. Vi treng da berre å nulle ut elementa i rad n. Diskuter føremoner og ulemper ved metodane basert på rotasjonar og Gausseliminasjon.

slutt