UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	Inf-Mat4350 —
Eksamensdag:	8. januar 2004
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 6 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1

Avgjør om følgende påstander er sanne eller gale, begrunn svaret.

1a

Metodene kjent som Gauss-Seidel og konjugerte gradienter har det til felles at de finner den eksakte løsning av ligningssystemet $Ax = b$ ved hjelp av et endelig antall aritmetiske operasjoner.

1b

La n være et positivt heltall og la A være den øvre triangulære nxn-matrisen hvor alle elementene på og over diagonalen er lik 1. Da har A lineært uavhengige egenvektorer.

Oppgave 2 Egenvektorer

La n være et positivt heltall. I denne oppgaven skal vi bestemme egenvektorene til en øvre triangulær matrise $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Den første enhetsvektoren er en egenvektor svarende til egenverdien $a_{1,1}$. Du skal ikke vise dette. La $2 \le k \le n$. Vi partisjonerer A på formen

$$A = \begin{bmatrix} B & a & C \\ 0 & a_{k,k} & d^T \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

hvor $B \in \mathbb{R}^{k-1,k-1}$, $E \in \mathbb{R}^{n-k,n-k}$ og $a_{k,k} \in \mathbb{R}$.

(Fortsettes på side 2.)

2a

Bestem om mulig $v \in \mathbb{R}^{k-1}$ slik at

$$\begin{bmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A svarende til egenverdien $a_{k,k}$. De $n-k$ siste komponentene i egenvektoren er lik 0. Gi en tilstrekkelig betingelse for at v eksisterer.

2b

Anta at betingelsen for eksistens av v i forrige deloppgave er oppfylt. Skriv en Matlab `function X=eigvecU(A)` som bestemmer egenvektorene $X = (x_1, \ldots, x_n)$ til A ved hjelp av formlene fra forrige deloppgave. Vi antar at det er gitt en `function x=utrisolve(U,c)` som løser det øvre triangulære systemet $Ux = c$ ved tilbakesubstitusjon. Du skal ikke skrive innmaten i `utrisolve`.

Oppgave 3

For et positivt heltall n la $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ være ikkesingulær og $x, x', b \in \mathbb{R}^n$ med $Ax = b$. Videre lar vi $\|\cdot\|$ betegne både en vektornorm på $\mathbb{R}^n$ og den tilhørende operatornorm for nxn-matriser.

3a

Vis at

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

hvor $e = x - x'$, $r = b - Ax'$ og $\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

3b

Diskuter betydningen av resultatet i deloppgave 3a når i tenker på x' som en approksimasjon til den eksakte løsningen x av $Ax = b$ og r som residualen til feilen.

Lykke til