UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MoD200 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	28. november 2002
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 8 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1 Ulike spørsmål

Avgjør om følgende påstander er sanne eller gale, begrunn svaret.

1a

Hvis $\mathbf{A}$ er positiv semidefinitt er $\mathbf{I} + \mathbf{A}^3$ positiv definitt.

1b

En singulær 2 ganger 2 matrise har ikke en LU-faktorisering.

Oppgave 2 Konjugerte gradienter

2a

Gitt metoden med konjugerte gradienter for å løse det lineære ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$. Utled en formel for $\mathbf{x}_1$ dersom vi starter med $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. (Hint: $\mathbf{x}_1$ er gitt som beste approksimasjonen i $\mathbf{A}$-norm til den eksakte løsningen $\mathbf{x}$ fra Krylovrommet $W_1 = \text{span}(\mathbf{f})$.)

Oppgave 3 Et lineært ligningssystem

Anta $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ er positiv definitt og at $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ har rang m. Vi antar også at Cholesky-faktoriseringen av $\mathbf{A}$ er kjent og at n er mye større enn m. Du kan videre anta at algoritmen for å foreta en Cholesky-faktorisering av en

(Fortsettes på side 2.)

positiv definitt matrise og algoritmene for forlengs og baklengssubstitusjon er kjente.

Vi definerer matrisen $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$.

3a

Vis at $\mathbf{C}$ er positiv definitt. Hint: Det er vist i kompendiet at hvis $\mathbf{E}$ er en matrise med lineært uavhengige kolonner er $\mathbf{E}^T\mathbf{E}$ positiv definitt.

3b

Gi en effektiv metode basert på Cholesky-faktorisering av $\mathbf{C}$ som til gitt $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ løser ligningssystemet $\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{d}$ uten å beregne $\mathbf{A}^{-1}$.

3c

Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n,m+n}$$

er ikke-singulær.

Oppgave 4 Singulærverdidekomposisjon

4a

La $\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^{m,n}$ hvor $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{y} \neq 0$ og m, n er positive heltall med $m \geq n$. Finn singulærverdiene til $\mathbf{A}$.

4b

Vis at singulærverdidekomposisjonen til $\mathbf{A}$ kan skrives $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ hvor $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$ er Householdermatriser. (En Householdermatrise $\mathbf{H}$ kan skrives på formen $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ hvor $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.)

Lykke til!