UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	Inf-Mat4350 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	13. desember 2004
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 6 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1 Ulike spørsmål

1a

Anta A er en kvadratisk matrise med $A^2 = A$. Vis at alle egenverdiene til A enten er lik 0 eller 1.

1b

La $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ha rang r og kompakt singulærverdidekomposisjon $A = U_1\Sigma_1 V_1^T$ hvor $U_1 \in \mathbb{R}^{m,r}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{n,r}$ og $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r,r}$. Forklar hvorfor søylene i U_1 er en ortonormal basis for søylerommet $R(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Oppgave 2 Kronecker Produkt

La $B \in \mathbb{R}^{s,s}$ og $C \in \mathbb{R}^{r,r}$ være gitte symmetriske og positiv definitte matriser og la

$$A = B \otimes C = \begin{bmatrix} Bc_{11} & \dots & Bc_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ Bc_{r1} & \dots & Bc_{rr} \end{bmatrix}$$

være Kronecker produktet av B og C. Vi minner om at egenverdiene til A er alle produkter av egenverdiene til B og C. For enhver $G \in \mathbb{R}^{m,n}$ definerer vi som vanlig vektoren $vec(G) \in \mathbb{R}^{mn}$ ved at vi stabler søylene $(g_1, \dots, g_n)$ i G i en vektor, $vec(G) = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$. Vi betrakter i denne oppgaven ligningssystemet $Ax = f$ hvor $f \in \mathbb{R}^{rs}$ er gitt.

(Fortsettes på side 2.)

2a

Forklar hvorfor A er symmetrisk og positiv definitt.

2b

Vis at 2-norm kondisjonstallet til A er produktet av 2-norm kondisjonstallene til B og C, $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(B)\mathrm{cond}_2(C)$.

2c

Det er vist i kompendiet at

$$(B \otimes C)x = f \Leftrightarrow BXC^T = F$$

hvor $x = vec(X)$, $f = vec(F)$ og $X, F \in \mathbb{R}^{s,r}$. (Du skal ikke vise dette.) Skriv en Matlab funksjon `x=kronek(B,C,f)` som løser $BXC^T = F$ ved å beregne F, Cholesky faktoriseringene til B og C og tilslutt x. Bruk Matlabfunksjonene `reshape`, `chol` og operatoren \ til å foreta forlengs og baklengs substitusjonene.

2d

La nå $r = s = 1000$. Vi kan løse systemet $Ax = f$ på to måter. Metode 1 er basert på en Cholesky faktorisering av A der $A = B \otimes C$. Metode 2 bruker programmet `kronek`. Hvilken metode vil du anbefale? Begrunn svaret.

Lykke til!

```
help chol
 CHOL   Cholesky factorization.
    CHOL(X) uses only the diagonal and upper triangle of X.
    The lower triangular is assumed to be the (complex conjugate)
    transpose of the upper.  If X is positive definite, then
    R = CHOL(X) produces an upper triangular R so that R'*R = X.
    If X is not positive definite, an error message is printed.

help reshape
 RESHAPE Change size.
    RESHAPE(X,M,N) returns the M-by-N matrix whose elements
    are taken columnwise from X.  An error results if X does
    not have M*N elements.
```