UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	Inf-Mat3350 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	13. desember 2004
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 6 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1 Ulike spørsmål

1a

Anta A er en kvadratisk matrise med $A^2 = A$. Vis at alle egenverdiene til A enten er lik 0 eller 1.

Løsning Hvis $Ax = \lambda x$ er $A^2x = \lambda^2 x$ og siden $A^2x = Ax$ er $\lambda^2 x = \lambda x$. Siden $x \neq 0$ er $\lambda^2 = \lambda$ som impliserer at $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.

1b

La $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ha rang r og kompakt singulærverdidekomposisjon $A = U_1\Sigma_1V_1^T$ hvor $U_1 \in \mathbb{R}^{m,r}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{n,r}$ og $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r,r}$. Forklar hvorfor søylene i U_1 er en ortonormal basis for søylerommet $R(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Løsning La $(v_1, \ldots, v_r)$ og $(u_1, \ldots, u_r)$ være søylene i V_1 og U_1 og la $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ med $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. Siden V_1 har ortonormale søyler er $V_1^TV_1 = I$ og vi får $AV_1 = U_1\Sigma_1$ eller $Av_i = \sigma_i u_i$, for $i = 1, \ldots, r$. Men da er $u_i \in R(A)$ for $i = 1, \ldots, r$. Siden A har rang r er $\dim R(A) = r$ og siden $u_1, \ldots, u_r$ er ortonormale må de være en ortonormal basis for $R(A)$.

Oppgave 2 Kronecker Produkt

La $B \in \mathbb{R}^{s,s}$ og $C \in \mathbb{R}^{r,r}$ være gitte symmetriske og positiv definitte matriser og la

$$A = B \otimes C = \begin{bmatrix} Bc_{11} & \ldots & Bc_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ Bc_{r1} & \ldots & Bc_{rr} \end{bmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

være Kronecker produktet av B og C. Vi minner om at egenverdiene til A er alle produkter av egenverdiene til B og C. For enhver $G \in \mathbb{R}^{m,n}$ definerer vi som vanlig vektoren $vec(G) \in \mathbb{R}^{mn}$ ved at vi stabler søylene $(g_1, \ldots, g_n)$ i G i en vektor, $vec(G) = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$. Vi betrakter i denne oppgaven ligningssystemet $Ax = f$ hvor $f \in \mathbb{R}^{rs}$ er gitt.

2a

Forklar hvorfor A er symmetrisk og positiv definitt.

Løsning Siden $B^T = B$ og $C^T = C$ er $A^T = (B \otimes C)^T = B^T \otimes C^T = B \otimes C = A$ så A er symmetrisk. Videre har A positive egenverdier siden egenverdiene til A er produktet av egenverdiene til B og C og disse matrisene har positive egenverdier siden de er positv definitte. Siden A har positive egenverdier er den positiv definitt.

2b

Vis at 2-norm kondisjonstallet til A er produktet av 2-norm kondisjonstallene til B og C, $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(B)\mathrm{cond}_2(C)$.

Løsning Anta B har egenverdier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_s$ og C har egenverdier $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r$. Siden 2-norm kondisjonstallet til en positiv definitt matrise er forholdet mellom største og minste egenverdi og egenverdiene til A er de $r \times s$ produktene av egenverdiene til B og C finner vi

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_s \mu_r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_s} \frac{\mu_1}{\mu_r} = \mathrm{cond}_2(B)\mathrm{cond}_2(C).$$

2c

Det er vist i kompendiet at

$$(B \otimes C)x = f \Leftrightarrow BXC^T = F$$

hvor $x = vec(X)$, $f = vec(F)$ og $X, F \in \mathbb{R}^{s,r}$. (Du skal ikke vise dette.) Skriv en Matlab funksjon `x=kronek(B,C,f)` som løser $BXC^T = F$ ved å beregne F, Cholesky faktoriseringene til B og C og tilslutt x. Bruk Matlabfunksjonene `reshape`, `chol` og operatoren \ til å foreta forlengs og baklengs substitusjonene.

Løsning Vi har $CX^T = Y^T$ hvor $BY = F$. Dette gir følgende program.

```
function x=kronek(B,C,f)
%x=kronek(B,C,f)
R=chol(B);                % B=R'*R
F=reshape(f,length(B),length(C))       % Invers vektoriserng
X= R\(R'\F)               % Forlengs og baklengs substitusjon
R=chol(C)                 % C=R'*R
X=(R'\(R\X'))'            % Forlengs og baklengs substitusjon
x=X(:)                    % Vektoriser X
```

(Fortsettes på side 3.)

2d

La nå $r = s = 1000$. Vi kan løse systemet $Ax = f$ på to måter. Metode 1 er basert på en Cholesky faktorisering av A der $A = B \otimes C$. Metode 2 bruker programmet kronek. Hvilken metode vil du anbefale? Begrunn svaret.

Løsning Det er tre hovedargumenter for å foretrekke Metode 2. a) telle antall flops, b) lagring, c) sammenligne kondisjonstall.

a) For metode 1 har vi et system av størrelse $n = rs$ og antall floats F_1 for Cholesky faktoriseringen er gitt ved $F_1 = n^3/3 = (rs)^3/3 = (10^6)^3/3 = 10^{18}/3$. Forlengs og baklengssubstitusjonen er en $O(n^2)$ prosess og antall flops for dette er neglisjerbart i forhold til F_1. For Choleskyfaktoriseringene i Metode 2 har vi $F_C = s^3/3 + r^3/3$. I tillegg kommer forlengs og baklengsssubstitusjon. Antall floats for forlengs- og baklengssubstitusjon for et n, n system med en høyreside er gitt ved $2n^2$. Med n høyresider blir tallet $2n^3$. Totalt er antall floats for Metode 2 gitt ved $F_2 = 7(s^3+r^3)/3 = 4.67 \cdot 10^9$. Forholdet mellom F_1 og F_2 er gitt ved $F_1/F_2 = 10^9/14$. Hvis regnetiden er proporsjonal med antall flops og Metode 2 bruker 7 sekunder CPU-tid vil Metode 1 ta $10^9/2$ sekunder eller 16 år CPU tid.

b) I metode 1 må vi lagre en matrise med $n^2 = 10^12$ elementer. I metode 2 trenger vi bare 3-4 matriser med 10^6 elementer.

c) Vi har vist at kondisjonstallet for metode 1 er produktet av kondisjonstallene i Metode 2. Metode 1 blir derfor alltid dårligere kondisjonert enn Metode 2 og kan bli svært mye dårligere kondisjonert.

Lykke til!

```
help chol
 CHOL   Cholesky factorization.
    CHOL(X) uses only the diagonal and upper triangle of X.
    The lower triangular is assumed to be the (complex conjugate)
    transpose of the upper.  If X is positive definite, then
    R = CHOL(X) produces an upper triangular R so that R'*R = X.
    If X is not positive definite, an error message is printed.

help reshape
 RESHAPE Change size.
    RESHAPE(X,M,N) returns the M-by-N matrix whose elements
    are taken columnwise from X.  An error results if X does
    not have M*N elements.
```