UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	Inf-Mat4350 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	08 desember 2005
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 6 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1 Riktig eller galt?

Avgjør om følgende påstander er riktige eller gale og begrunn svaret:

1a

Matrisen

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

er ortogonal?

1b

La

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Det finnes en ikkesingulær matrise $Y \in \mathbb{R}^{2,2}$ og en diagonalmatrise $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ slik at $A = YDY^{-1}$?

Oppgave 2 Singulærverdier

Gitt påstanden "Hvis $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ har singulærverdier $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ har A^2 singulærverdier $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$". Finn en klasse av matriser hvor påstanden holder. Vis at påstanden ikke holder generelt.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 Øvre Hessenberg matrise

Vi skal løse ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hvor $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ er ikkesingulær og $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. I tillegg er $A = (a_{ij})$ på øvre Hessenberg form, dvs $a_{ij} = 0$ for $i > j + 1$. Vi skal løse systemet ved hjelp av Givens refleksjoner. Vi minner om at for $l > k$ er en Givens refleksjon $G_{kl} = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ en symmetrisk og ortogonal matrise som kun adskiller seg fra enhetsmatrisen i posisjonene kk, ll, kl og lk. Vi har

$$\begin{bmatrix} g_{kk} & g_{kl} \\ g_{lk} & g_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix}$$

hvor $c, s \in \mathbb{R}$ og $s^2 + c^2 = 1$.

3a

La $\boldsymbol{d} = G_{kl}\boldsymbol{a}$ hvor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Bestem c, s og $\boldsymbol{d}$ slik at $d_l = 0$. La $B, C \in \mathbb{R}^{n,n}$ og $C = G_{kl}B$. Gi formler for radene i C uttrykt ved c, s og radene i B.

3b

Skriv en Matlab `function x=Hsolve(A,b)` som til en gitt ikkesingulær øvre Hessenberg matrise A bestemmer c_k og s_k i $G_{k,k+1}$ for $k = 1, \ldots, n-1$ slik at matrisen $G_{n-1,n} \cdots G_{23}G_{12}A$ er øvre triangulær. Vektoren $G_{n-1,n} \cdots G_{23}G_{12}\boldsymbol{b}$ bestemmes samtidig under eliminasjonen ved å arbeide med den utvidede matrisen $[A, \boldsymbol{b}]$. Tilslutt bestemmes løsningen $\boldsymbol{x}$ av $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Du kan bruke Matlab funksjonen `triu` (se nedenfor) og Matlab operatoren \ for tilbakesubstitusjonen.

3c

Vi kunne også prøve Gauss eliminasjon uten pivotering til å løse ligningssystemet. Det kan vises at metoden basert på Givens rotasjoner krever dobbelt så mange arimetiske operasjoner som Gausseliminasjon. Diskuter fordeler og ulemper ved de to metodene.

Lykke til!

```
help triu

TRIU Extract upper triangular part.
    TRIU(X) is the upper triangular part of X.
```