UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	Inf-Mat3350 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	08 desember 2005
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 6 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1 Riktig eller galt?

Begrunn følgende påstander:

1a

Matrisen

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

er ortogonal?

Løsning Siden $(3,4) * (4,-3)^T = 0$ har A ortogonale søyler, men siden $\frac{1}{36}(3^2+4^2) \neq 1$ er søylene ikke ortonormale. Hvis vi endrer faktoren $\frac{1}{6}$ til $\frac{1}{5}$ blir A ortogonal.

1b

Hvis $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ har singulærverdier $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ har A^2 singulærverdier $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$?

Løsning Singulærverdiene er kvadratroten av egenverdiene til A^TA så påstanden holder hvis og bare hvis A^TA og A^2 har samme egenverdier. Påstanden er riktig hvis A er symmetrisk. Et eksempel hvor påstanden er gal er $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. A^2 er øvre triangulær med egenverdier $(1,1)$, mens $A^TA = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ har egenverdier $(3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})/2$.

La A ha singulærverdidekomposisjon $A = U\Sigma V^T$. Påstanden er riktig hvis $V = U$ for da er $A^2 = U\Sigma V^T U\Sigma V^T = U\Sigma^2 V^T$ og dette er singulærverdidekomposisjonen av A^2. $V = U$ holder hvis A er normal

(Fortsettes på side 2.)

1c

La

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Det finnes en ikkesingulær matrise $Y \in \mathbb{R}^{2,2}$ og en diagonalmatrise $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ slik at $A = YDY^{-1}$?

Løsning Galt! La $Y = (y_1, y_2)$ og $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Siden $AY = YD$ er $Ay_j = \lambda_j y_j$ for $j = 1, 2$, dvs y_1 og y_2 er egenvektorer til A med egenverdier λ_1 og λ_2. Siden A er øvre triangulær er egenverdiene diagonalelementene i A, dvs $\lambda_1 = \lambda_2 = a$. Videre er y_1 og y_2 lineært uavhengige siden Y er ikkesingulær. La $x = (x_1, x_2)$ være en egenvektor til A med egenverdi λ slik at $Ax = \lambda x$ eller $ax_1 + x_2 = ax_1$ og $ax_2 = ax_2$. Løsning er x_1 vilkårlig og $x_2 = 0$. Men det betyr at A ikke har lineært uavhengige egenvektorer og den kan derfor ikke diagonaliseres.

Oppgave 2 Øvre Hessenberg matrise

Vi skal løse ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hvor $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ er ikkesingulær og $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. I tillegg er $A = (a_{ij})$ på øvre Hessenberg form, dvs $a_{ij} = 0$ for $i > j + 1$. Vi skal løse systemet ved hjelp av Givens refleksjoner. Vi minner om at for $l > k$ er en Givens refleksjon $G_{kl} = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ en symmetrisk og ortogonal matrise som kun adskiller seg fra enhetsmatrisen i posisjonene kk, ll, kl og lk. Vi har

$$\begin{bmatrix} g_{kk} & g_{kl} \\ g_{lk} & gll \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix}$$

hvor $c, s \in \mathbb{R}$ og $s^2 + c^2 = 1$.

2a

La $\boldsymbol{d} = G_{kl}\boldsymbol{a}$ hvor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Bestem c, s og $\boldsymbol{d}$ slik at $d_l = 0$. La $B, C \in \mathbb{R}^{n,n}$ og $C = G_{kl}B$. Gi formler for radene i C uttrykt ved c, s og radene i B.

Løsning vi har $d_i = c_i$ for $i \neq k, l$ og

$$d_k = ca_k + sa_l, \quad d_l = sa_k - ca_l.$$

Hvis

$$s = \frac{a_l}{r}, \quad c = \frac{a_k}{r}, \text{ hvor } r = \sqrt{a_k^2 + a_l^2}$$

finner vi $d_k = r$ og $d_l = 0$.

B og C vil være like bortsett fra i radene k og l. For disse radene har vi

$$C(k,:) = c * B(k,:) + s * B(l,:), \quad C(l,:) = s * B(k,:) - c * B(l,:).$$

(Fortsettes på side 3.)

2b

Skriv en Matlab `function x=Hsolve(A,b)` som til en gitt ikkesingulær øvre Hessenberg matrise A bestemmer c_k og s_k i $G_{k,k+1}$ for $k = 1, \ldots, n-1$ slik at matrisen $G_{n-1,n} \cdots G_{23}G_{12}A$ er øvre triangulær. Vektoren $G_{n-1,n} \cdots G_{23}G_{12}\boldsymbol{b}$ bestemmes samtidig under eliminasjonen ved å arbeide med den utvidede matrisen $[A, \boldsymbol{b}]$. Tilslutt bestemmes løsningen $\boldsymbol{x}$ av $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Du kan bruke Matlab funksjonen `triu` (se nedenfor) og Matlab operatoren \ for tilbakesubstitusjonen.

Løsning program.

```
function x=Hsolve(A,b)
% x=Hsolve(A,b)
n=length(b);
U=[A b];
for k=1:n-1
    r=sqrt(U(k,k)^2+U(k+1,k)^2);
    c=U(k,k)/r; s=U(k+1,k)/r; U(k,k)=r;
    v=c*U(k,k+1:n+1)+s*U(k+1,k+1:n+1);
    U(k+1,k+1:n+1)=s*U(k,k+1:n+1)-c*U(k+1,k+1:n+1);
    U(k,k+1:n+1)=v;
end
x=triu(U(:,1:n))\U(:,n+1);
```

2c

Vi kunne også prøve Gausseliminasjon uten pivotering til å løse ligningssystemet. Det kan vises at metoden basert på Givens rotasjoner krever dobbelt så mange arimetiske operasjoner som Gausseliminasjon. Diskuter fordeler og ulemper ved de to metodene.

Løsning Siden Gausseliminasjon er dobbelt så rask vil den ofte være å foretrekke. Men hvis vi ikke vet annet om matrisen enn at den er øvre Hessenberg og ikkesingulær må vi generelt bruke pivotering i Gausseliminasjon og Givens kan være mer atraktiv i slike tilfeller. Selv om vi ikke behøver å pivotere kan Gausseliminasjon være numerisk ustabil selv om den som regel vil være stabil. Bruk av Givens refleksjoner leder til en numerisk stabil algoritme.

```
help triu

TRIU Extract upper triangular part.
    TRIU(X) is the upper triangular part of X.
```