UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT3350/4350 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	06 desember 2006
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Vektene til hver deloppgave står i parentes.

Oppgave 1 Ja eller nei

Svar kun ja eller nei på følgende spørsmål:

1a (2)

Enhver matrise $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$ har en singulærverdidekomposisjon?

1b (2)

Den algebraiske multiplisiteten til en egenverdi er alltid mindre enn eller lik den geometriske multiplisiteten?

1c (2)

QR-faktoriseringen til en matrise $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ kan bestemmes ved Householder transformasjoner i $O(n^2)$ operasjoner?

1d (2)

La $\rho(\boldsymbol{A})$ være spektralradiusen til $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Da gjelder $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$ hvis og bare hvis $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$.

Oppgave 2 QR-faktorisering av båndmatriser

La $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ være en ikkesingulær, symmetrisk båndmatrise med båndbredde $d \leq n-1$, slik at $a_{ij} = 0$ for alle i, j med $|i-j| > d$. Vi setter

(Fortsettes på side 2.)

$\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ og lar $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ være QR-faktoriseringen av $\boldsymbol{A}$ hvor $\boldsymbol{R}$ har positive diagonalelementer.

2a (2)

Vis at $\boldsymbol{B}$ er symmetrisk.

2b (8)

Vis at $\boldsymbol{B}$ har båndbredde $\leq 2d$.

2c (10)

Skriv en MATLAB `function B=ata(A,d)` som beregner $\boldsymbol{B}$. Du skal utnytte symmetrien og funksjonen skal kun bruke $O(cn^2)$ flops, hvor c bare avhenger av d.

2d (5)

Estimer antal flops i algoritmen din.

2e (2)

Vis at $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$.

2f (8)

Forklar hvorfor $\boldsymbol{R}$ har øvre båndbredde $2d$.

2g (10)

Vi betrakter 3 metoder for å finne QR-faktoriseringen av båndmatrisen $\boldsymbol{A}$ hvor vi antar at n er mye større enn d. Metodene er basert på

1. Gram-Schmidt ortogonalisering,
2. Householder transformasjoner,
3. Givens rotasjoner.

Hvilken metode vil du anbefale for et dataprogram som bruker flytende aritmetikk? Begrunn svaret.

Oppgave 3 Diagonalisering og egenvektorer

Gitt matrisene $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ og $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ hvor $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ er ikkesingulær.

(Fortsettes på side 3.)

3a (4)

Vis at $(\lambda, \boldsymbol{x})$ er et egenpar for $\boldsymbol{B}$ hvis og bare hvis $(\lambda, \boldsymbol{S}\boldsymbol{x})$ er et egenpar for $\boldsymbol{A}$.

3b (8)

Søylene i $\boldsymbol{S}$ er egenvektorer for $\boldsymbol{A}$ hvis og bare hvis $\boldsymbol{B}$ er en diagonalmatrise.

Lykke til!