UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT3350/4350 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	06 desember 2006
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Vektene til hver deloppgave står i parentes.

Oppgave 1 Ja eller nei

Svar: ja eller nei på følgende spørsmål

1a (2)

Enhver matrise $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$ har en singulærverdidekomposisjon? Ja

1b (2)

Den algebraiske multiplisiteten til en egenverdi er alltid mindre enn eller lik den geometriske multiplisiteten? Nei

1c (2)

QR-faktoriseringen til en matrise $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ kan bestemmes ved Householder transformasjoner i $O(n^2)$ operasjoner? Nei

1d (2)

La $\rho(\boldsymbol{A})$ være spektralradiusen til $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Da gjelder $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$ hvis og bare hvis $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$. Ja

Oppgave 2 QR-faktorisering av båndmatriser

La $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ være en ikkesingulær, symmetrisk båndmatrise med båndbredde $d \leq n-1$, slik at $a_{ij} = 0$ for alle i,j med $|i-j| > d$. Vi setter

(Fortsettes på side 2.)

$\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ og lar $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ være QR-faktoriseringen av $\boldsymbol{A}$ hvor $\boldsymbol{R}$ har positive diagonalelementer.

2a (2)

Vis at $\boldsymbol{B}$ er symmetrisk.

løsning: $\boldsymbol{B}^T = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

2b (8)

Vis at $\boldsymbol{B}$ har båndbredde $\le 2d$.

løsning: Anta $1 \le i \le j \le n$. Siden $a_{ij} = 0$ for alle i, j med $|i - j| > d$ finner vi

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \sum_{k=\max\{1,j-d\}}^{\min\{n,i+d\}} a_{ki}a_{kj}.$$

Hvis $j > i + 2d$ er $j - d > i + d$ og $b_{ij} = 0$. Siden $\boldsymbol{B}$ er symmetrisk er også $b_{ji} = 0$. Men da er $b_{ij} = 0$ for alle i, j med $|j - i| > 2d$.

2c (10)

Skriv en MATLAB `function B=ata(A,d)` som beregner $\boldsymbol{B}$. Du skal utnytte symmetrien og funksjonen skal kun bruke $O(cn^2)$ flops, hvor c bare avhenger av d.

```
function B=ata(A,d)
[m,n]=size(A); B=zeros(n);
for i=1:n
    for j=i:n
        il=max(1,j-d);
        iu=min(n,i+d);
        B(i,j)=A(il:iu,i)'*A(il:iu,j);
        B(j,i)=B(i,j);
    end
end
```

2d (5)

Estimer antal flops i algoritmen din.

løsning: Siden $j \ge i$ har vi $iu - il \le i + d - j + d \le 2d$ slik at beregning av hver $B(i, j)$ krever høyst $2(2d + 1) = O(4d)$ flops. Antall flops er derfor $O(\int_0^n \int_i^n (4d)djdi) = O(2dn^2)$.

(Fortsettes på side 3.)

2e (2)

Vis at $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$.

løsning: Siden $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ finner vi $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$.

2f (8)

Forklar hvorfor $\boldsymbol{R}$ har øvre båndbredde $2d$.

løsning: Siden $\boldsymbol{R}$ er øvre triangulær med positive diagonalelementer ser vi at $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$ er Cholesky-faktoriseringen av $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. Fra kursteksten vet vi at $\boldsymbol{R}$ har samme øvre båndbredde $2d$ som $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

2g (10)

Vi betrakter 3 metoder for å finne QR-faktoriseringen av båndmatrisen $\boldsymbol{A}$ hvor vi antar at n er mye større enn d. Metodene er basert på

1. Gram-Schmidt ortogonalisering,
2. Householder transformasjoner,
3. Givens rotasjoner.

Hvilken metode vil du anbefale for et dataprogram som bruker flytende aritmetikk? Begrunn svaret.

løsning:

- *Stabilitet.* Metode 1 er ikke stabil, mens 2 og 3 er det. 1. kan produsere vektorer som ikke er ortogonale.
- *Kompleksitet.* Siden $\boldsymbol{A}$ er en båndmatrise med liten båndbredde vil 2. kreve flere flops enn 1 og 3.
- *Konklusjon* Jeg anbefaler metode 3.

Oppgave 3 Diagonalisering og egenvektorer

Gitt matrisene $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ og $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ hvor $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ er ikkesingulær.

3a (4)

Vis at $(\lambda, \boldsymbol{x})$ er et egenpar for $\boldsymbol{B}$ hvis og bare hvis $(\lambda, \boldsymbol{S}\boldsymbol{x})$ er et egenpar for $\boldsymbol{A}$.

løsning: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})$, og $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} \neq 0$ siden $\boldsymbol{S}$ er ikkesingulær.

(Fortsettes på side 4.)

3b (8)

Søylene i $\boldsymbol{S}$ er egenvektorer for $\boldsymbol{A}$ hvis og bare hvis $\boldsymbol{B}$ er en diagonalmatrise.

løsning: Anta $\boldsymbol{A}$ har egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ og la $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n$ være søylene i $\boldsymbol{S}$. Hvis $\boldsymbol{B}$ er en diagonalmatrise har den egenverdiene til $\boldsymbol{A}$ på diagonalen og $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)$ et egenpar for $\boldsymbol{B}$ for alle i. Oppgave **3a** impliserer at $(\lambda_i, \boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i) = (\lambda_i, \boldsymbol{s}_i)$ er et egenpar for $\boldsymbol{A}$ for $i = 1, \ldots, n$. Omvendt, hvis $\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_i = \lambda_i \boldsymbol{s}_i$ for $i = 1, \ldots, n$, så er $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{B}$ eller $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, hvor $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.