

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i INF-MAT 4350 — Numerisk lineær algebra

Eksamensdag: 4 Desember 2008

Tid for eksamen: 0900–1200

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 7 delspørsmål vil bli veiet likt.

Oppgave 1 Iterative metoder

Gitt ligningssystemet $Ax = b$ hvor

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

og $b = (1, 9, -2)^T$.

1a

Med $x_0 = (1, 1, 1)^T$, utfør en iterasjon med Gauss-Seidel's metode for å finne $x_1 \in \mathbb{R}^3$.

1b

Vil metoden konvergere hvis vi fortsetter iterasjonen? Hvorfor?

1c

Skriv et matlab program for Gauss-Seidel's metode anvendt på en matrise $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ og en høyreside $b \in \mathbb{R}^n$. Bruk forholdet mellom den sist beregnede residual og initialresidualen samt max antall iterasjoner som stoppekriterium.

Hint: funksjonen $C=\text{tril}(A)$ legger den nedre delen av A i en nedre triangulær matrise C .

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 QR-faktorisering

La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2a

Finn Cholesky faktoriseringen til $A^T A$.

2b

Finn QR-faktoriseringen til A .

Oppgave 3 Kroneckerprodukter

La $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Vis at egenverdiene til Kroneckerproduktet $A \otimes B$ er produktet av egenverdiene til A og B og at egenvektorene til $A \otimes B$ er Kroneckerproduktet til egenvektorene til A og B .

Oppgave 4 Matrisenormer

Anta $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ er inverterbar, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, og $Ax = b$ og $Ay = b + e$. Vis at

$$\frac{1}{K(A)} \frac{\|e\|}{\|b\|} \leq \frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|e\|}{\|b\|},$$

hvor $\|\cdot\|$ er den Euklidske vektornormen i \mathbb{R}^n og $K(A)$ er kondisjonstallet til A med hensyn på matrise 2-normen.

Lykke til!