UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 4350 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	4 Desember 2008
Tid for eksamen:	0900 – 1200

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 7 delspørsmål vil bli veiet likt.

Oppgave 1 Iterative metoder

Gitt ligningssystemet $Ax = b$ hvor

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

og $b = (1, 9, -2)^T$.

1a

Med $x_0 = (1, 1, 1)^T$, utfør en iterasjon med Gauss-Seidel's metode for å finne $x_1 \in \mathbb{R}^3$.

Svar:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= (b(1) - x_0(3))/3 = (1-1)/3 = 0, \\ x_1(2) &= (b(2) - 2x_0(3))/7 = (9 - 2*1)/7 = 1, \\ x_1(3) &= (b(3) - x_1(1) - 2x_1(2))/4 = (-2 - 0 - 2*1)/4 = -1. \end{aligned}$$

1b

Vil metoden konvergere hvis vi fortsetter iterasjonen? Hvorfor?

Svar: Ja. Siden A er diagonaldominant, dvs.

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, 3,$$

(Fortsettes på side 2.)

vil alle dens egenverdier være positive ved Gerschgorin's sirkelteorem. Derfor, siden A også er symmetrisk er den positive definitt, og dette garanterer konvergens.

1c

Skriv et matlab program for Gauss-Seidel's metode anvendt på en matrise $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ og en høyreside $b \in \mathbb{R}^n$. Bruk forholdet mellom den sist beregnede residual og initialresidualen samt max antall iterasjoner som stoppekriterium.

Hint: funksjonen C=tril(A) legger den nedre delen av A i en nedre triangulær matrise C.

Svar:

```
function [x,it]=gs(A,b,x,tol,maxit)
nr=norm(b-A*x,2);
C = tril(A);
for k=1:maxit
  r=b-A*x;
  x=x+C\r;
  if norm(r,2)/nr<tol
    it=k; return;
  end
end
it = maxit;
```

Oppgave 2 QR-faktorisering

La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2a

Finn Cholesky factoriseringen til $A^T A$.

Svar:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}.$$

Vi ønsker $A^T A = R^T R$ hvor

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix},$$

og $r_{11}, r_{22} > 0$. Siden

$$R^T R = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11} r_{12} \\ r_{11} r_{12} & r_{12}^2 + r_{22}^2 \end{pmatrix},$$

(Fortsettes på side 3.)

trenger vi

$$r_{11}^2 = 16, \qquad r_{11}r_{12} = -8, \qquad r_{12}^2 + r_{22}^2 = 20.$$

Løsningen er $r_{11} = 4$, $r_{12} = -2$, $r_{22} = 4$.

2b

Finn QR-faktoriseringen til A.

Svar: Vi har allerede funnet R:

$$R = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

For å finne $A = QR$ trenger vi $Q = AR^{-1}$ og siden

$$R^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

finner vi

$$Q = AR^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3 Kroneckerprodukter

La $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Vis at egenverdiene til Kroneckerproduktet $A \otimes B$ er produktet av eigenverdiene til A og B og at egenvektorene til $A \otimes B$ er Kroneckerproduktet til egenvektorene til A og B.

Svar: Anta at $Au = \lambda u$ og $Bv = \mu v$. Da er

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(u \otimes v) &= \begin{pmatrix} Ab_{11} & \cdots & Ab_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Ab_{n1} & \cdots & Ab_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} uv_1 \\ \vdots \\ uv_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Ab_{11}uv_1 + \cdots + Ab_{1n}uv_n \\ \vdots \\ Ab_{n1}uv_1 + \cdots + Ab_{nn}uv_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au(Bv)_1 \\ \vdots \\ Au(Bv)_n \end{pmatrix} \\ &= (Au) \otimes (Bv) = (\lambda u) \otimes (\mu v) = (\lambda\mu)(u \otimes v).\end{aligned}$$

Oppgave 4 Matrisenormer

Anta $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ er inverterbar, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, og $Ax = b$ og $Ay = b + e$. Vis at

$$\frac{1}{K(A)}\frac{\|e\|}{\|b\|} \leq \frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq K(A)\frac{\|e\|}{\|b\|},$$

(Fortsettes på side 4.)

hvor $\|\cdot\|$ er den Euklidske vektornormen i $\mathbb{R}^n$ og $K(A)$ er kondisjonstallet til A med hensyn på matrise 2-normen.

Svar: Siden $Ax = b$, har vi

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \tag{1}$$

og fordi $A^{-1}b = x$, har vi

$$\|x\| = \|A^{-1}b\| \leq \|A^{-1}\|\|b\| \tag{2}$$

Tilsvarende siden $A(y-x) = e$, har vi

$$\|e\| = \|A(y-x)\| \leq \|A\|\|y-x\| \tag{3}$$

og fordi $A^{-1}e = y - x$, har vi

$$\|y-x\| = \|A^{-1}e\| \leq \|A^{-1}\|\|e\|. \tag{4}$$

Nå, siden $K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, gir ligningene (2) og (3) den nedre grensen på $\|y-x\|/\|x\|$ og ligningene (1) og (4) gir den øvre grensen.

Lykke til!