



TALL

Dagens plan:

- **Tallsystemer** (kapittel 6)
 - Titallsystemet
 - Det binære tallsystemet
 - Det heksadesimale tallsystemet
- **Representasjon av tall** (kapittel 7)
 - Heltall
 - Negative tall
 - Reelle tall
 - Gray-kode (les selv!)
- **Ut i rommet** (kapittel 8)
 - Punkter i n-dimensjonale rom
 - Geometrier med utstrekning

Titallsystemet – et posisjonssystem

I titallsystemet (desimalsystemet) har vi 10 sifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9.

Større tall konstrueres ved hjelp av et posisjonssystem:

10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
(100 000)	(10 000)	(1 000)	(100)	(10)	(1)

Det binære tallsystemet

Også det binære tallsystemet er et posisjonssystem, denne gangen med grunntall 2 (og 2 sifre, 0 og 1):

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
(128)	(64)	(32)	(16)	(8)	(4)	(2)	(1)

Konvertering: Titallsystemet \rightarrow binære tall

Alternativ 1

Gitt et tall x i titallsystemet.

1. Finn i slik at 2^i er den største toer-potensen som er mindre enn x .
2. Sett en 1 i posisjon i .
3. Trekk 2^i fra x , dvs sett $x = x - 2^i$.
4. Gjenta inntil $x = 0$.

Eksempel:

Alternativ 2

Gitt et tall x i titallsystemet.

1. Start på posisjon 0.
2. Hvis x er oddetall, sett 1 i denne posisjonen (ellers 0).
3. Sett x lik x heltallsdividert med 2.
4. Så lenge $x \neq 0$, fortsett med neste posisjon til venstre.

Eksempel:

Det heksadesimale tallsystemet

I det heksadesimale tallsystemet er grunntallet 16. For å få 16 sifre, bruker vi bokstavene A–F i tillegg til sifrene 0–9.

$0 = 0_{16}$, $1 = 1_{16}$, ..., $9 = 9_{16}$, $10 = A_{16}$,
 $11 = B_{16}$, $12 = C_{16}$, $13 = D_{16}$, $14 = E_{16}$,
 $15 = F_{16}$

16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
(1048576)	(65536)	(4096)	(256)	(16)	(1)

Konvertering: Binært ↔ heksadesimalt

Binært	Heksadesimalt
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Regning med binærtall

Addisjon

Regneregler:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ og } 1 \text{ i mente}$$

Eksempler:

$$5 + 5:$$

$$7 + 7:$$

Multiplikasjon

Regneregler:

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Eksempler:

$$5 \cdot 5:$$

$$7 \cdot 7:$$

Ulike klasser tall

- De **naturlige** tallene:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- De **hele** tallene:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

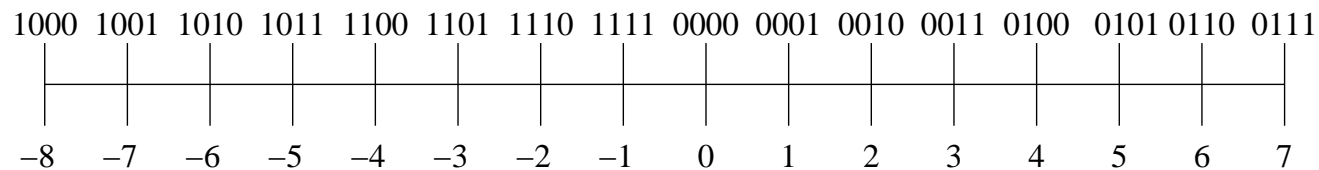
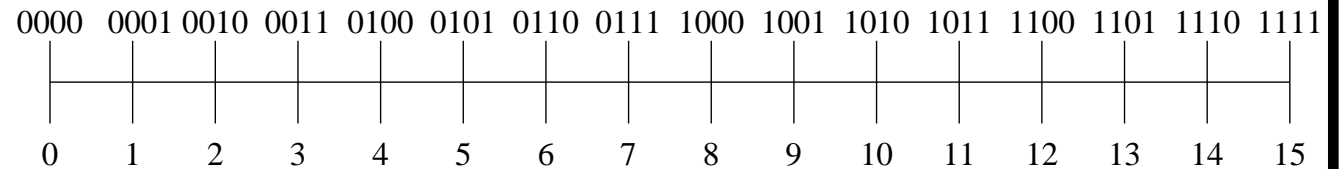
- De **rasjonale** tallene:

\mathbb{Q} = alle tall som kan skrives som en brøk.

- De **reelle** tallene:

\mathbb{R} = alle tallene på tallinjen.

Negative tall: Toer-komplement



For å negere et tall:

1. Snu alle bit-ene i tallet ($0 \leftrightarrow 1$).
2. Legg til 1.

Med toer-komplement får vi:

- Positive binærtall har første siffer 0.
- Negative binærtall har første siffer 1.

Hvis vi adderer to tall og får en ekstra mente til venstre, kan den bare kastes.

Eksempel:

$$-1 + 4:$$

Men: Hvis de to mentene lengst til venstre er ulike, har vi overflyt og ugyldig svar.

Eksempler:

$$3 + 5:$$

$$-8 - 1:$$

Negative tall: Bias

Et alternativ er å legge til en konstant *bias* til alle tallene.

Med 8 bitposisjoner og bias 128 kan tallene fra -128 til 127 representeres ved hjelp av tallene fra 0 til 255 .

Eksempler:

53:

-21 :

NB: Ved addisjon kommer bias med to ganger, så vi må trekke den fra igjen (en gang).

Eksempel:

$53 + (-21)$:

Flyttall

I titallsystemet kan et tall skrives på formen

$$\text{mantisse} \cdot 10^{\text{eksponent}}$$

Eksempler:

$$0.5 \cdot 10^2 = 0.5 \cdot 100 = 50$$

$$0.5 \cdot 10^0 = 0.5 \cdot 1 = 0.5$$

$$0.5 \cdot 10^{-1} = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05$$

$$-0.5 \cdot 10^{-1} = -0.5 \cdot 0.1 = -0.05$$

Tilsvarende kan vi skrive binære flyttall på formen

$$\text{mantisse} \cdot 2^{\text{eksponent}}$$

For flyttall må vi altså representere både eksponent og mantisse. Begge må kunne være positive, negative og null.

Binære flyttall: IEEE 754

Single precision (32 bitposisjoner)

1 bit fortegn	8 bit eksponent (bias 127)	23 bit mantisse
------------------	----------------------------------	--------------------

NB: Antar at mantissen er på formen $1.x\dots$ og at den ledende 1 ikke lagres!

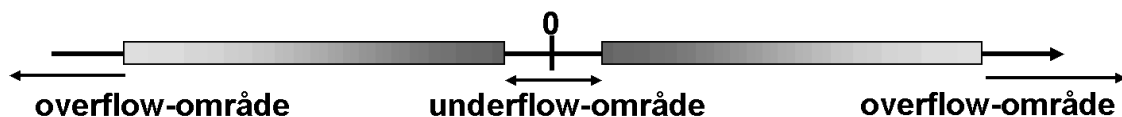
Double precision (64 bitposisjoner)

1 bit fortegn	11 bit eksponent (bias 1023)	52 bit mantisse
------------------	------------------------------------	--------------------

Spesielle verdier

- **Null:** Både eksponent og mantisse er 0.
- **Uendelig:** Eksponent med bare 1ere, mantisse med bare 0ere.
- **Not a number:** Eksponent med bare 1ere, mantisse $\neq 0$.
 - Mantisse starter med 1: Resultat av udefinert operasjon (0/0).
 - Mantisse starter med 0: Resultat av ulovlig operasjon (N/0).

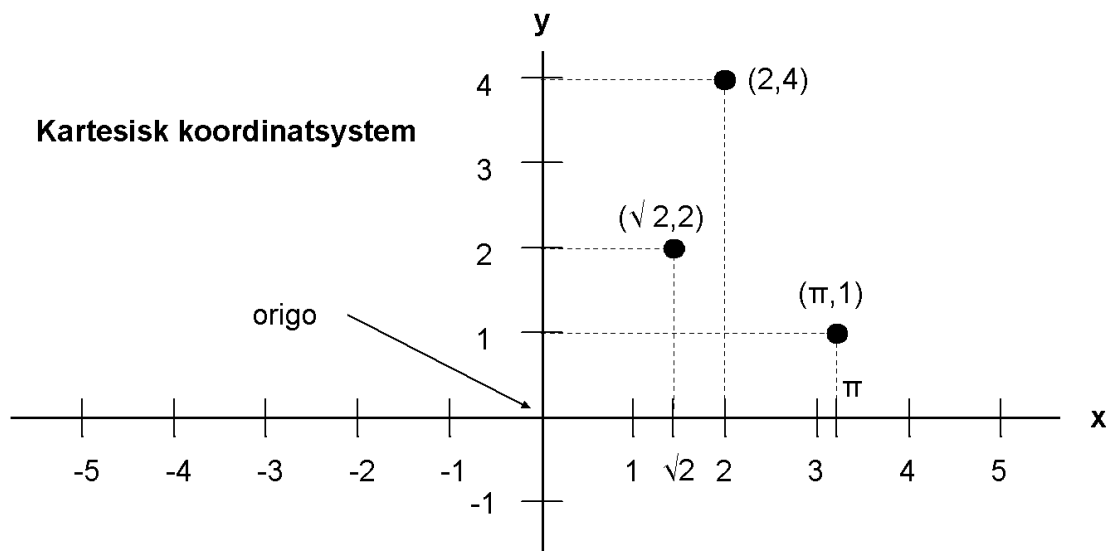
Merk: Kan fortsatt ikke representere alle mulige tall:



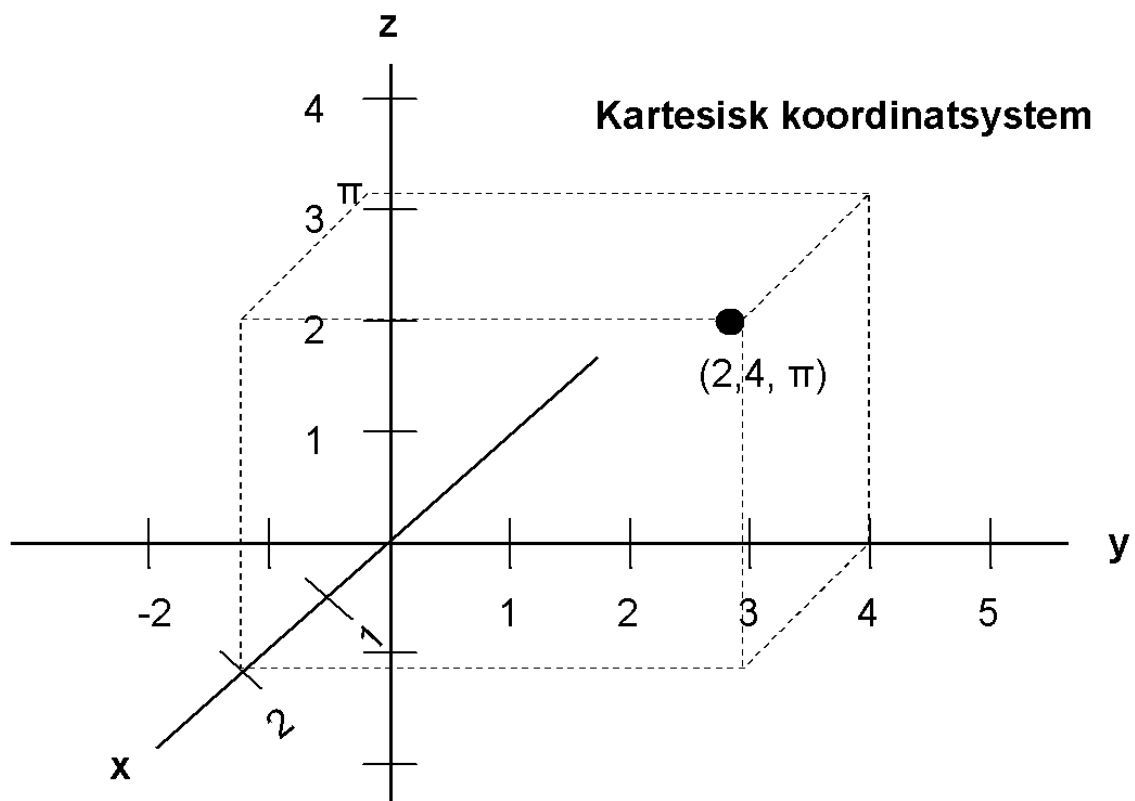
Punkter i n-dimensjonale rom

Ett enkelt tall kan oppfattes som et punkt i et endimensjonalt rom (en linje). Tallet er da en *koordinatverdi*.

I et todimensjonalt rom trenger vi et *koordinatpar*:

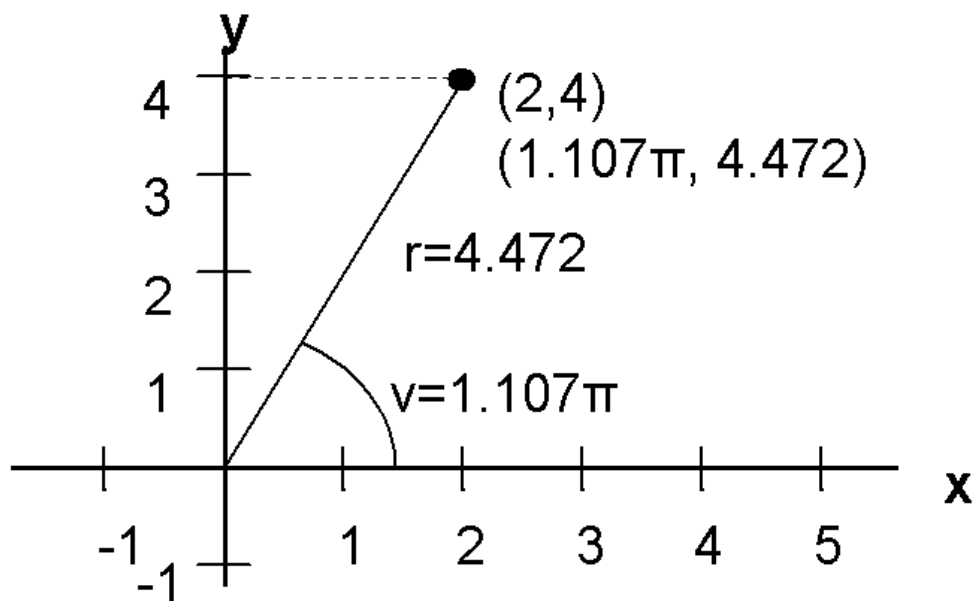


I et tredimensjonalt rom trenger vi et *koordinattrippel*:



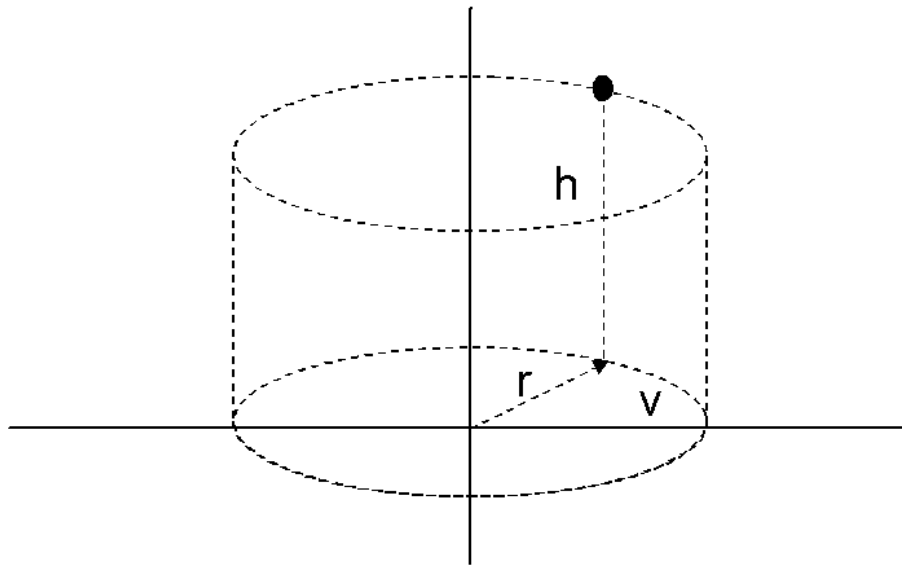
Polarkoordinater

Alternativ til kartesiske koordinater ved to dimensjoner:

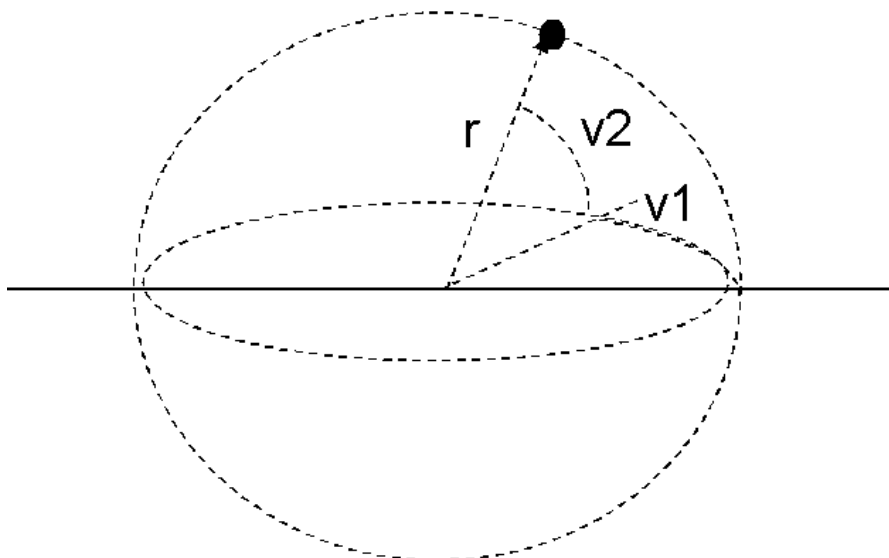


Sylinderkoordinater

Alternativ til kartesiske koordinater ved tre dimensjoner:



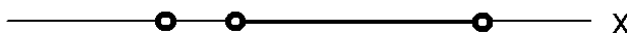
Sfæriske koordinater



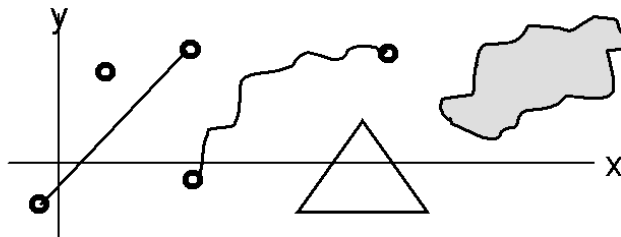
Geometrier i rommet

En geometri kan oppfattes som en punktsky med uendelig mange punkter. Dimensjonaliteten kan ikke være større enn rommets dimensjonalitet.

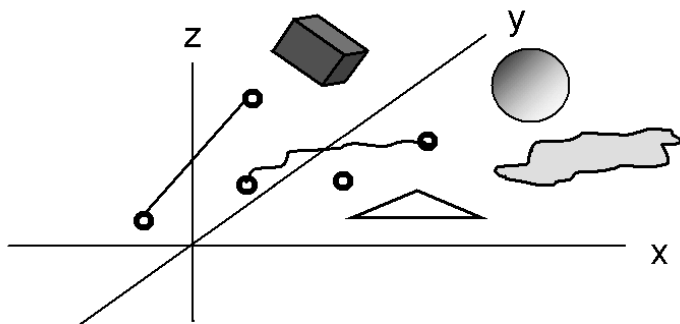
Endimensjonalt rom



Todimensjonalt rom

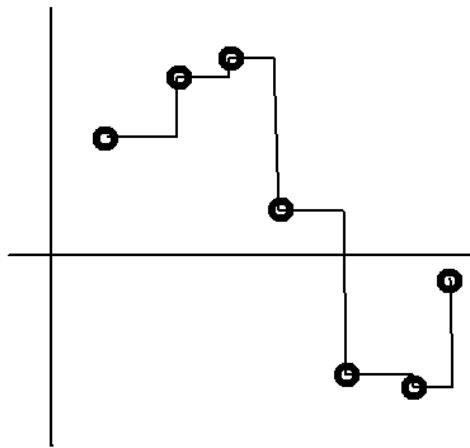


Tredimensjonalt rom

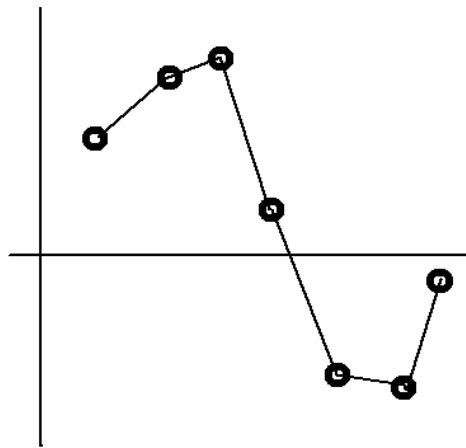


- **Vektorrepresentasjon:** Representerer utvalgte punkter, og regner ut de andre ved behov.
- **Rasterrepresentasjon:** Bygges opp ved hjelp av et endelig antall "punkter med utstrening".

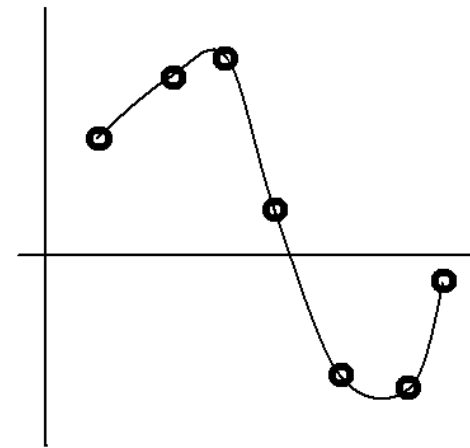
Interpolasjonsteknikker



Interpolasjon med konstant

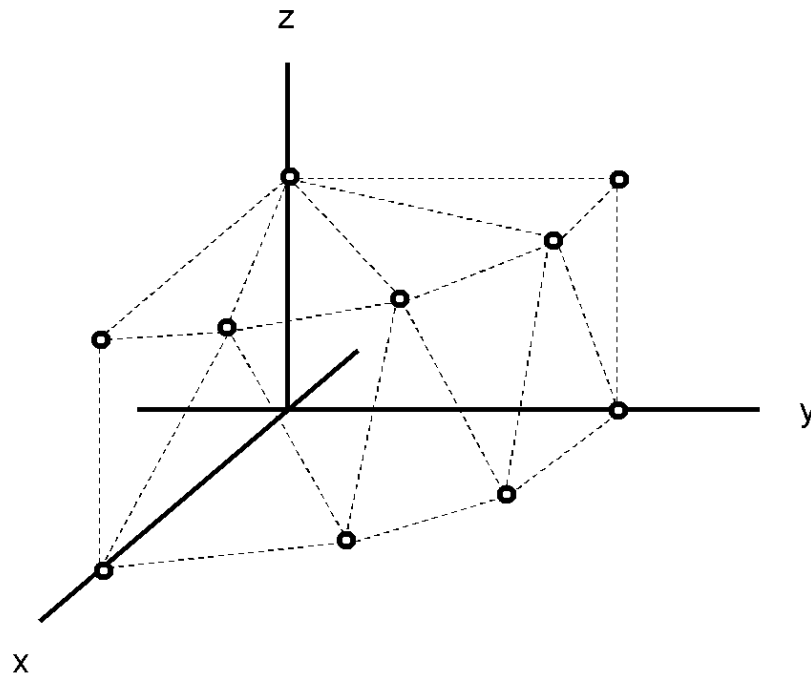


Lineær interpolasjon

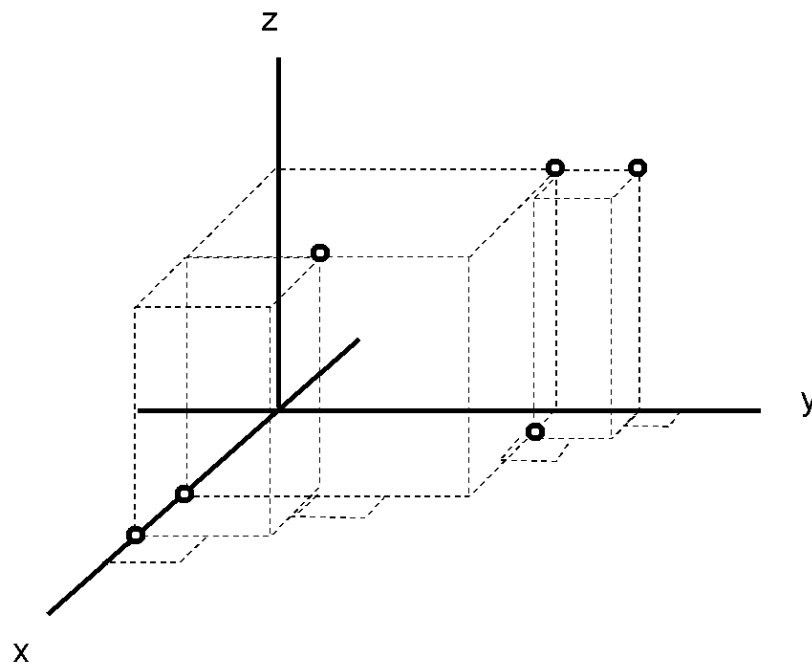


Interpolasjon med glatting

Triangulated irregular network (TIN)



Quad-tre

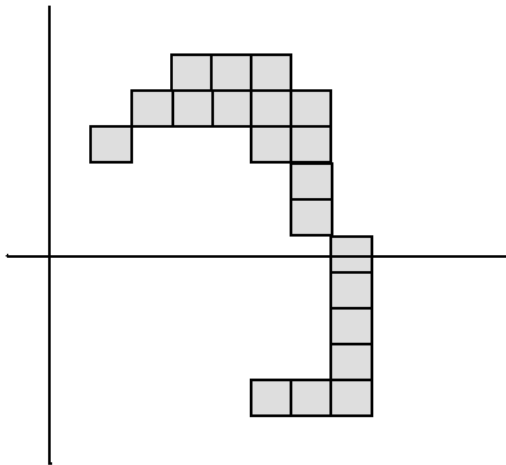


Rasterrepresentasjon

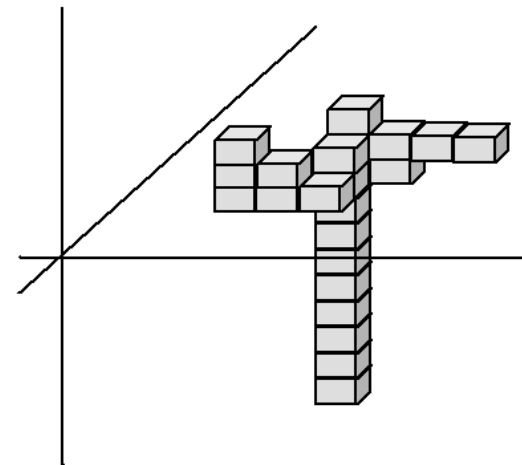
I rasterrepresentasjon bygges geometrien opp av “punkter med utstrekning”.



Endimensjonalt raster



Todimensjonalt raster



Tredimensjonalt raster

Tall: Oppsummering

- Tall kan representeres
 - tekstlig
 - som binære tall
 - i Gray-kode
 - som flyttall
- For negative binære heltall brukes vanligvis toer-komplement. Et alternativ er bruk av bias.
- Tall kan betraktes som punkter i et rom. Tallene fungerer da som koordinater.
- For geometrier med utstrekning kan vi bruke enten vektorrepresentasjon eller rasterrepresentasjon.