TALL

Dagens plan:

- Tallsystemer (kapittel 6)
  - — Titallsystemet
  - — Det binære tallsystemet
  - — Det heksadesimale tallsystemet
- Representasjon av tall (kapittel 7)
  - — Heltall
  - — Negative tall
  - — Reelle tall
  - — Gray-kode (les selv!)
- Ut i rommet (kapittel 8)
  - — Punkter i n-dimensjonale rom
  - — Geometrier med utstrekning

Titallsystemet — et posisjonssystem

I titallsystemet (desimalsystemet) har vi 10 sifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9.

Større tall konstrueres ved hjelp av et posisjonssystem:

10^5 (100 000)	10^4 (10 000)	10^3 (1 000)	10^2 (100)	10^1 (10)	10^0 (1)

Det binære tallsystemet

Også det binære tallsystemet er et posisjonssystem, denne gangen med grunntall 2 (og 2 sifre, 0 og 1):

2^7 (128)	2^6 (64)	2^5 (32)	2^4 (16)	2^3 (8)	2^2 (4)	2^1 (2)	2^0 (1)

Konvertering: Titallsystemet $\rightarrow$ binære tall

Alternativ 1

Gitt et tall x i titallsystemet.

1. Finn i slik at 2^i er den største toer-potensen som er mindre enn x.
2. Sett en 1 i posisjon i.
3. Trekk 2^i fra x, dvs sett $x = x - 2^i$.
4. Gjenta inntil $x = 0$.

Eksempel:

Alternativ 2

Gitt et tall x i titallsystemet.

1. Start på posisjon 0.
2. Hvis x er oddetall, sett 1 i denne posisjonen (ellers 0).
3. Sett x lik x heltallsdividert med 2.
4. Så lenge $x \neq 0$, fortsett med neste posisjon til venstre.

Eksempel:

Det heksadesimale tallsystemet

I det heksadesimale tallsystemet er grunntallet 16. For å få 16 sifre, bruker vi bokstavene A–F i tillegg til sifrene 0–9.

$0 = 0_{16}$, $1 = 1_{16}$, ..., $9 = 9_{16}$, $10 = A_{16}$, $11 = B_{16}$, $12 = C_{16}$, $13 = D_{16}$, $14 = E_{16}$, $15 = F_{16}$

16^5 (1048576)	16^4 (65536)	16^3 (4096)	16^2 (256)	16^1 (16)	16^0 (1)

Konvertering: Binært $\leftrightarrow$ heksadesimalt

Binært	Heksadesimalt
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Regning med binærtall

Addisjon

Regneregler:

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \\ 0+1 &= 1 \\ 1+0 &= 1 \\ 1+1 &= 0 \text{ og } 1 \text{ i mente} \end{aligned}$$

Eksempler:

$5+5$:

$7+7$:

Multiplikasjon

Regneregler:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 0 &= 0 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

Eksempler:

$5 \cdot 5$:

$7 \cdot 7$:

Ulike klasser tall

- De naturlige tallene:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- De hele tallene:
  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- De rasjonale tallene:
  $\mathbb{Q} =$ alle tall som kan skrives som en brøk.
- De reelle tallene:
  $\mathbb{R} =$ alle tallene på tallinjen.

Negative tall: Toer-komplement

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7

For å negere et tall:

1. Snu alle bit-ene i tallet $(0 \leftrightarrow 1)$.
2. Legg til 1.

Med toer-komplement får vi:

- Positive binærtall har første siffer 0.
- Negative binærtall har første siffer 1.

Hvis vi adderer to tall og får en ekstra mente til venstre, kan den bare kastes.

Eksempel:

$-1 + 4$:

Men: Hvis de to mentene lengst til venstre er ulike, har vi overflyt og ugyldig svar.

Eksempler:

$3 + 5$:

$-8 - 1$:

Negative tall: Bias

Et alternativ er å legge til en konstant *bias* til alle tallene.

Med 8 bitposisjoner og bias 128 kan tallene fra -128 til 127 representeres ved hjelp av tallene fra 0 til 255.

Eksempler:

53:

-21:

NB: Ved addisjon kommer bias med to ganger, så vi må trekke den fra igjen (en gang).

Eksempel:

$53 + (-21)$:

Flyttall

I titallsystemet kan et tall skrives på formen

$$\textit{mantisse} \cdot 10^{\textit{eksponent}}$$

Eksempler:

$0.5 \cdot 10^2 = 0.5 \cdot 100 = 50$
$0.5 \cdot 10^0 = 0.5 \cdot 1 = 0.5$
$0.5 \cdot 10^{-1} = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05$
$-0.5 \cdot 10^{-1} = -0.5 \cdot 0.1 = -0.05$

Tilsvarende kan vi skrive binære flyttall på formen

$$\textit{mantisse} \cdot 2^{\textit{eksponent}}$$

For flyttall må vi altså representere både eksponent og mantisse. Begge må kunne være positive, negative og null.

Binære flyttall: IEEE 754

Single precision (32 bitposisjoner)

1 bit	8 bit	23 bit
fortegn	eksponent (bias 127)	mantisse

NB: Antar at mantissen er på formen $1.x\ldots$ og at den ledende 1 ikke lagres!

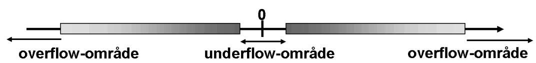
Double precision (64 bitposisjoner)

1 bit	11 bit	52 bit
fortegn	eksponent (bias 1023)	mantisse

Spesielle verdier

- Null: Både eksponent og mantisse er 0.
- Uendelig: Eksponent med bare 1ere, mantisse med bare 0ere.
- Not a number: Eksponent med bare 1ere, mantisse $\neq 0$.
  - Mantisse starter med 1: Resultat av udefinert operasjon ($0/0$).
  - Mantisse starter med 0: Resultat av ulovlig operasjon ($N/0$).

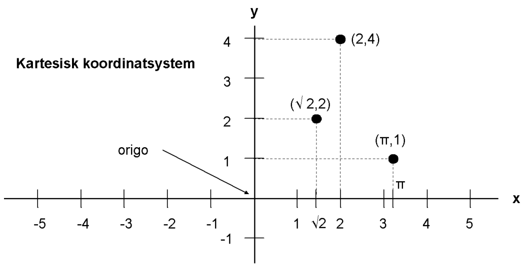
Merk: Kan fortsatt ikke representere alle mulige tall:



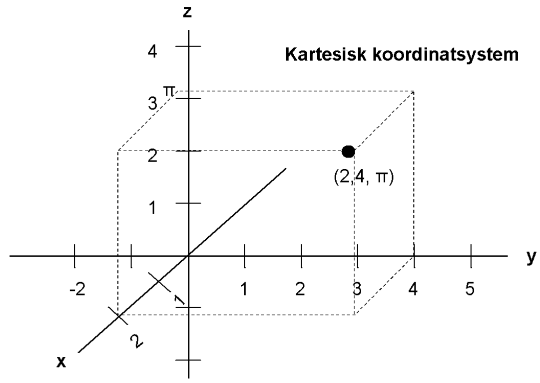
Punkter i n-dimensjonale rom

Ett enkelt tall kan oppfattes som et punkt i et endimensjonalt rom (en linje). Tallet er da en *koordinatverdi*.

I et todimensjonalt rom trenger vi et *koordinatpar*:

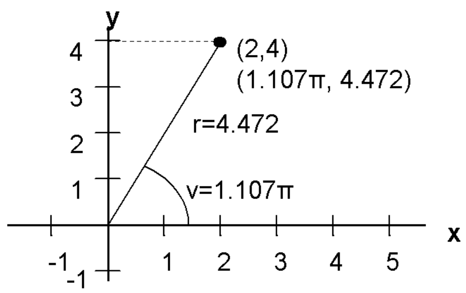


I et tredimensjonalt rom trenger vi et *koordinattrippel*:



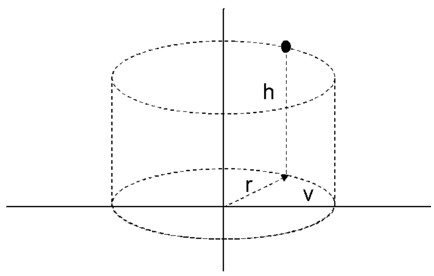
Polarkoordinater

Alternativ til kartesiske koordinater ved to dimensjoner:

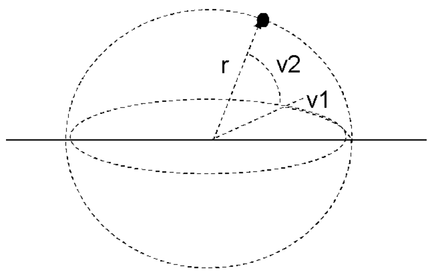


Sylinderkoordinater

Alternativ til kartesiske koordinater ved tre dimensjoner:

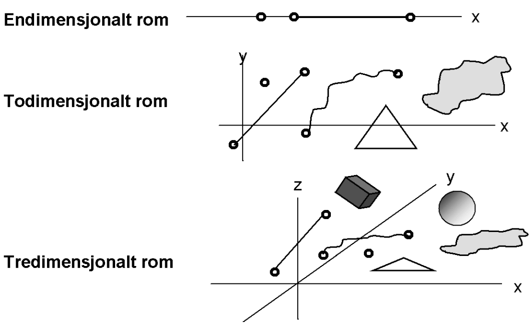


Sfæriske koordinater



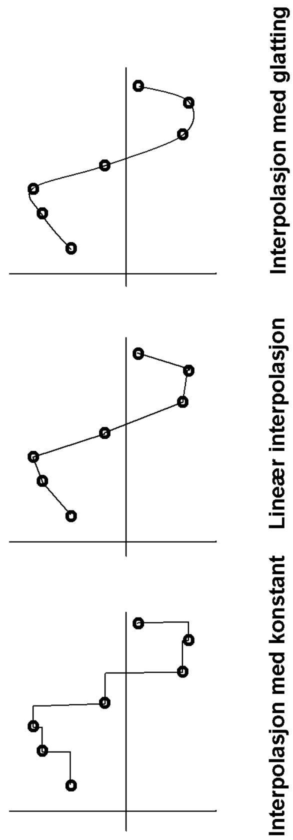
Geometrier i rommet

En geometri kan oppfattes som en punktsky med uendelig mange punkter. Dimensjonaliteten kan ikke være større enn rommets dimensjonalitet.

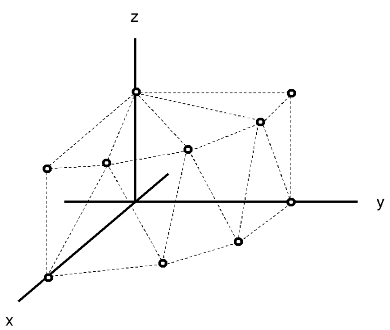


- Vektorrepresentasjon: Representerer utvalgte punkter, og regner ut de andre ved behov.
- Rasterrepresentasjon: Bygges opp ved hjelp av et endelig antall “punkter med utstrening”.

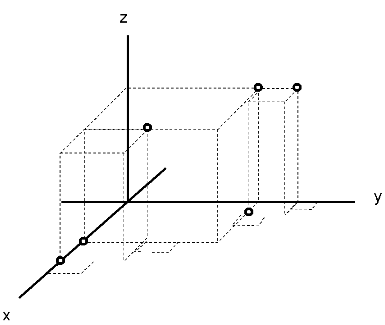
Interpolasjonsteknikker



Triangulated irregular network (TIN)

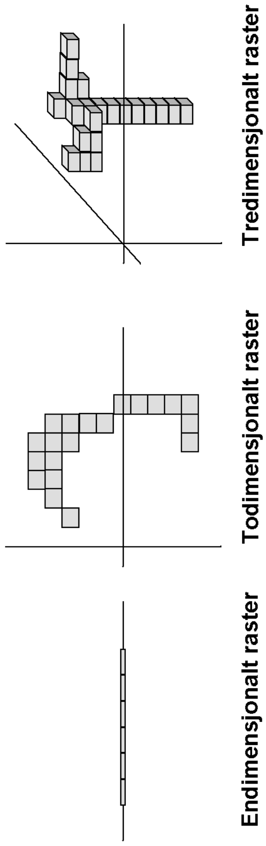


Quad-tre



Rasterrepresentasjon

I rasterrepresentasjon bygges geometrien opp av “punkter med utstrekning”.



Tall: Oppsummering

- Tall kan representeres
  - tekstlig
  - som binære tall
  - i Gray-kode
  - som flyttall
- For negative binære heltall brukes vanligvis toer-komplementer. Et alternativ er bruk av bias.
- Tall kan betraktes som punkter i et rom. Tallene fungerer da som koordinater.
- For geometrier med utstrekning kan vi bruke enten vektorrepresentasjon eller rasterrepresentasjon.