



UNIVERSITETET
I OSLO

Forelesning nr.4 INF 1410

Flere teknikker for kretsanalyse og -transformasjon



Oversikt dagens temaer

- Linearitet og superposisjonsprinsippet
- Praktiske (virkelige) strøm- og spenningskilder
- Ekvivalente strøm- og spenningskilder
- Nortons teorem
- Thévenins teorem
- Norton- og Thévenin-ekvivalente kretser



Linearitet

- Et *lineært element* defineres som et element som har et lineært strøm-spenningsforhold, dvs $v=Ki$, der K er en konstant proporsjonalitetsfaktor
- En *resistor* er et *lineært passivt* element siden $v(t)=Ri(t)$
- En *lineær avhengig kilde* er en kilde hvor outputstrøm eller -spenning er 1.ordens proporsjonal med enten styrespenningen eller –strømmen (event. summen av styrestrømmer/spenninger), dvs
 $v_{out}=Av_x+Bi_y$ der v_x og i_x er kontrollerende spenning/strøm, og A og B vilkårlige konstanter



Linearitet (forts)

- En lineær krets er en krets som kun består av
 - .Uavhengige kilder
 - .Lineære avhengige kilder
 - .Lineære elementer
- Konsekvens: Hvis alle uavhengige kilder multiplieres med en faktor K , vil outputstrøm/spenning multipliseres med den samme faktoren K
- Spenning/strøm ut fra avhengige kilder vil multipliseres med den samme faktoren K



Spørsmål – del 1

- Hvilke av strøm-spenningsfunksjonene er lineære?

$$i(t) = Kv(t)$$

$$i(t) = Kv(t)i_2(t)$$

$$v(t) = G(i(t) + v(t))$$

$$v(t) = G(i(t) + v(t))(i(t) + G)$$

- Hvilke av de avhengige kildene nedenfor er lineære?

$$i_s = Gv_x$$

$$v_s = Gv_x(1 + v_x)$$

$$i_s = Gv_x + Gv_y(1 + v_y)$$

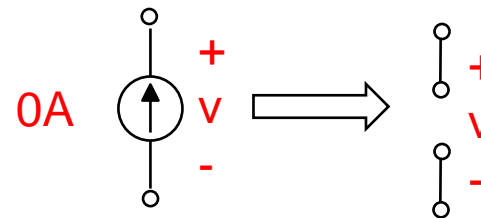
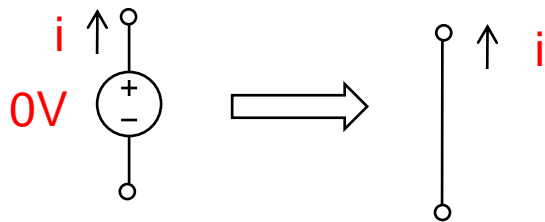
$$v_s = Gv_s + v_x + i_y$$



Superposisjon

- Superposisjon er en konsekvens av linearitet
- Superposisjonsteoremet:

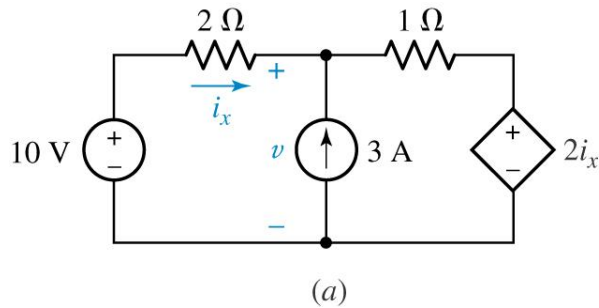
I ethvert lineært resistivt nettverk kan spenningen over eller strømmen gjennom en kilde eller et element beregnes ved algebraisk å legge sammen de individuelle spenningene/strømmene fra separate uavhengige kilder, med de andre spenningskildene kortsluttet (dvs spenning lik 0) og de andre strømkildene åpnet (dvs strøm lik 0)





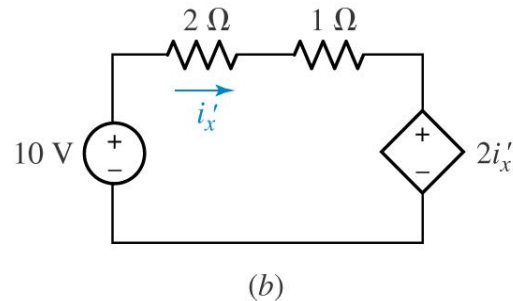
Bruk av superposisjon

- Superposisjon gjør det ofte enklere å beregne enkeltstrømmer eller -spenninger over elementer/kilder i nettverk med mange kilder
- Eksempel: Ønsker å finne i_x ved å bruke superposisjon



Bruk av superposisjon (forts)

- Starter med å åpne den uavhengige strømkilden :



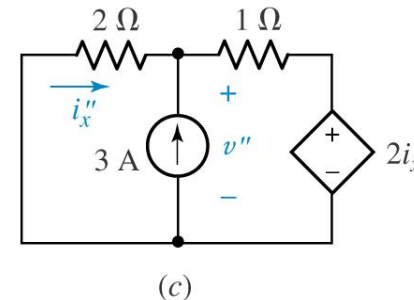
- Den avhengige strømkilden har nå fått styrestrøm $2i'_x$
- Utleder meshstrømmen for å finne i'_x

$$-10 + 2i'_x + 1i'_x + 2i'_x = 0$$

$$i'_x = 2A$$

Bruk av superposisjon (forts)

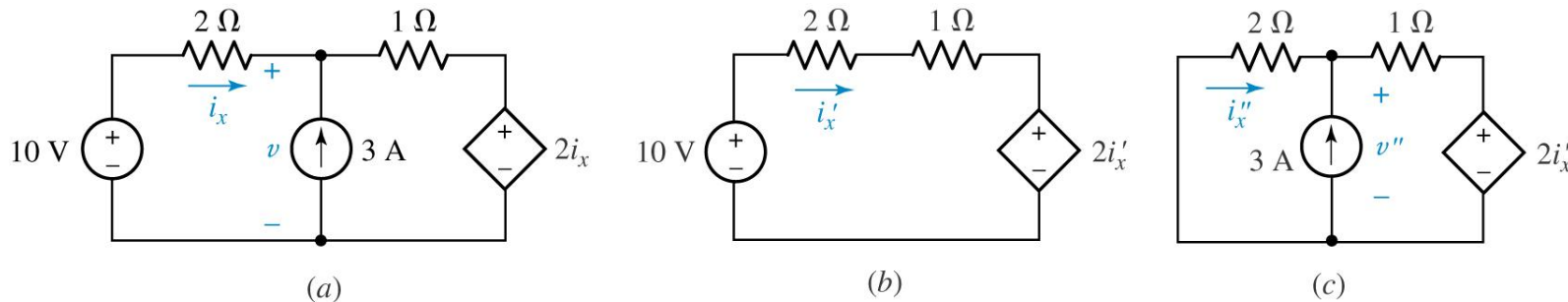
- Kortslutter deretter den uavhengige spenningskilden:



- Den avhengige strømkilden har nå fått styrestrøm $2i_x''$ og spenningen over den uavhengige strømkilden spenning v''
- Bruker single-node ligning for å finne i_x''

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i_x''}{1} = 3 \quad \wedge \quad v'' = 2(-i_x'') \Rightarrow i_x'' = -0.6A$$

Bruk av superposisjon (forts)



- Dette gir da at $i_x = i_x' + i_x'' = 2 + (-0.6A) = 1.4A$
- Superposisjon gjør ikke analysen automatisk enklere, men det blir lettere å finne reponsen som følger av en bestemt påtrykksfunksjon (kilde)



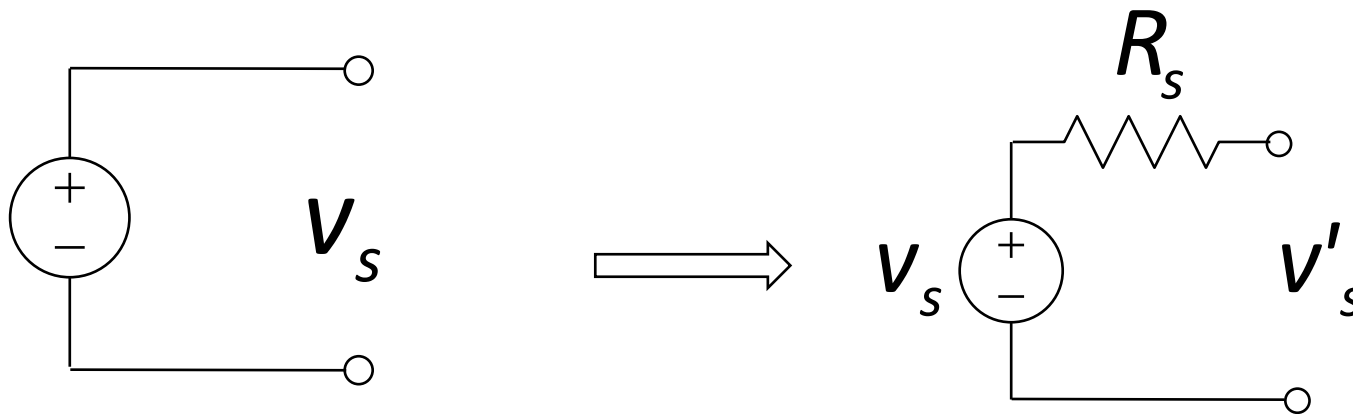
Praktiske kilder

- Strøm- og spenningskildene (både de avhengige og uavhengige) så langt hittil har vært ideelle, dvs at
 - Spenningskilden leverer en spenning som er uavhengig av strømmen gjennom den
 - Strømkilden leverer en strøm som er uavhengig av spenningen over den
- For praktiske (eller reelle eller fysiske) kilder er dette korrekt kun innenfor begrensede intervaller av kildens operasjonsområde



Praktiske spenningskilder

- Alle fysiske spenningskilder (batteri, generator, solcelle etc) har en viss indre motstand
- En fysisk spenningskilde kan derfor modelleres med en ideel spenningskilde og en ideel resistor:

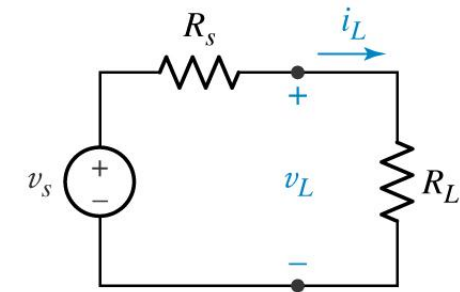


Praktiske spenningskilder (forts)

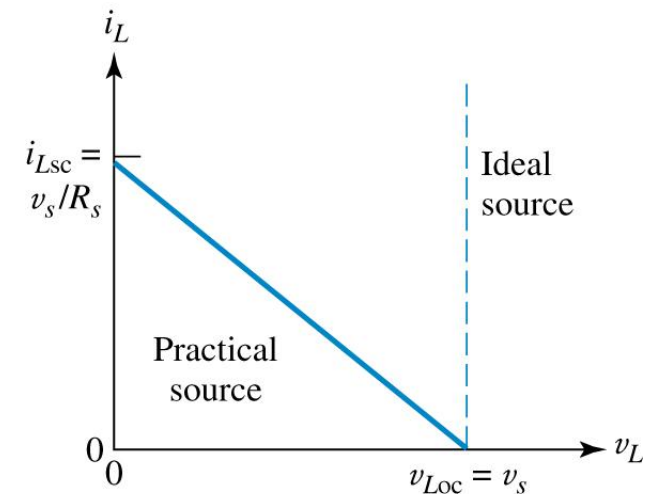
- Analyserer virkemåten med en lastmotstand R_L på utgangen av den praktiske spenningskilden (a).
- Siden lastmotstanden R_L nå står i serie med den interne motstanden R_s , har vi fått en spenningsdeler hvor

$$V_L = V_s \frac{R_L}{R_s + R_L}$$

- Som vist i (b) er ikke spenningen v_L uavhengig av strømmen i_L lenger



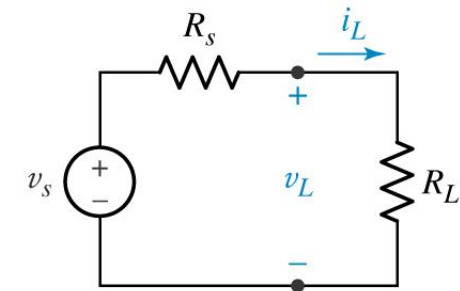
(a)



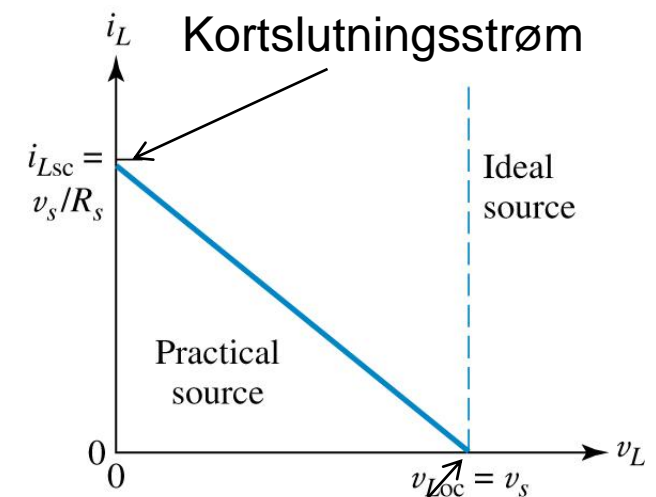
(b)

Praktiske spenningskilder (forts)

- Maksimal strøm har vi når spenningen $v_L=0$, dvs lastmotstanden kortsluttet
- Ingen strøm flyter når lastspenningen $v_L=V_s$
- Spenningen v_L over R_L blir lik v_s når $R_L=\infty$, siden det da ikke går noe strøm
- Uendelig stor motstand betyr at kretsen er åpen.
- Spenningen over den praktiske spenningskilden er $v_L=v_s-R_s i_L$



(a)

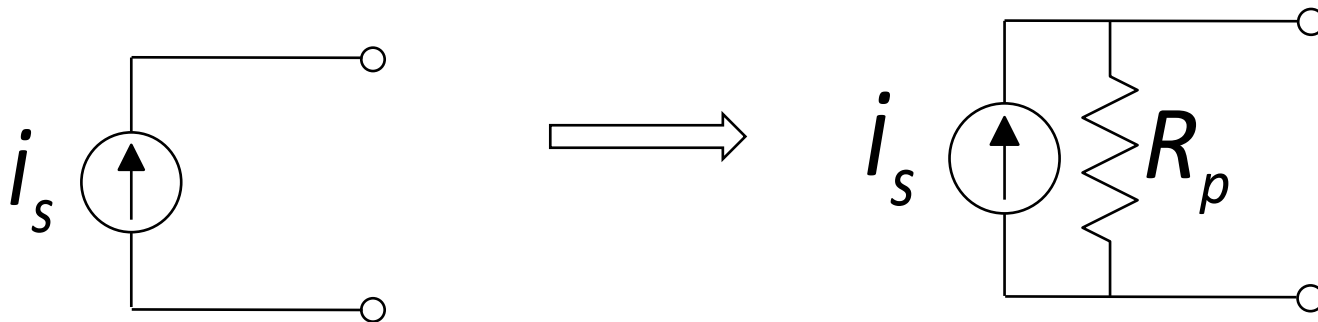


(b)

Spenning ved åpen krets

Praktiske strømkilder

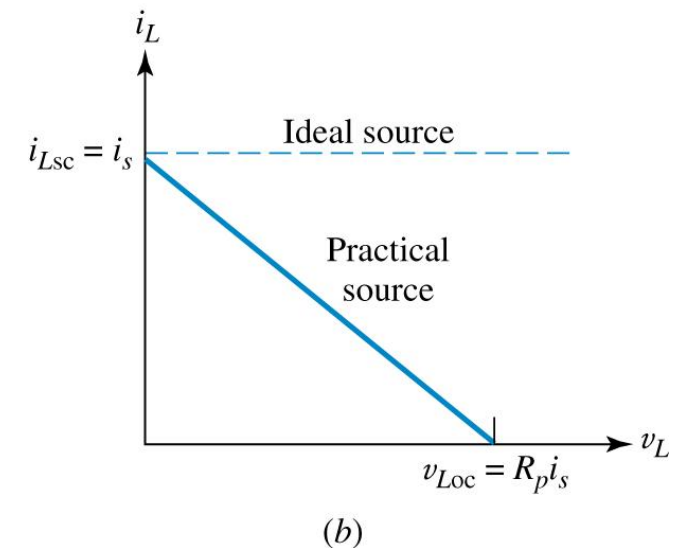
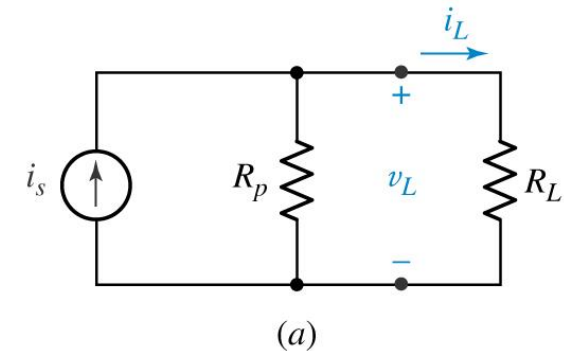
- Tilsvarende praktiske spenningskilder har også praktiske strømkilder en viss indre motstand
- En praktisk strømkilde kan modelleres med en ideel strømkilde og en ideel motstand:



Praktiske strømkilder (forts)

- Analyserer virkemåten med en lastmotstand R_L på utgangen av den praktiske strømkilden (a).
- Siden lastmotstanden R_L nå står i parallell med den interne motstanden R_p , har vi fått en strømdeler hvor

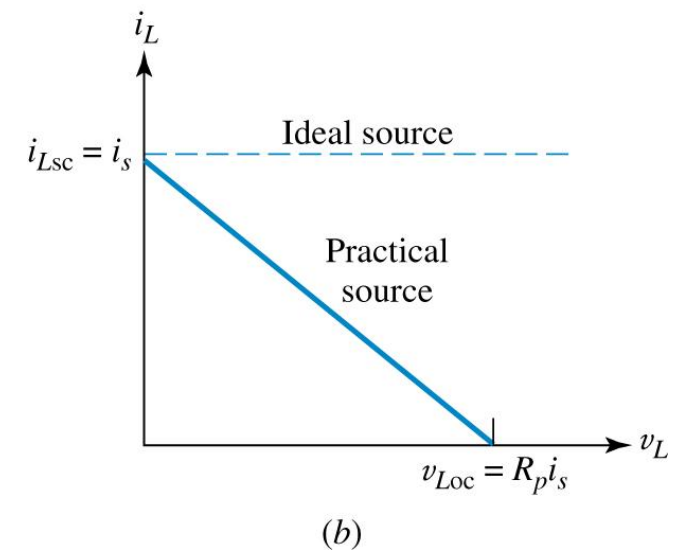
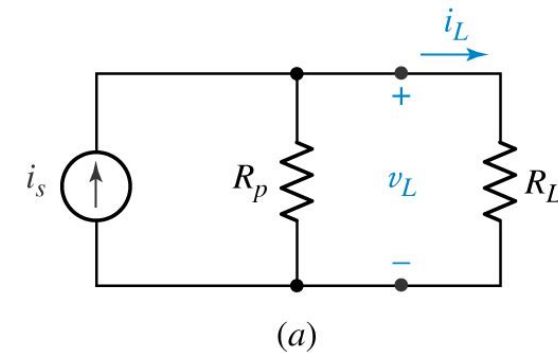
$$i_L = \frac{v_L}{R_L} = \frac{i_s (R_L \parallel R_p)}{R_L} = i_s \frac{R_p}{R_L + R_p}$$



Praktiske strømkilder (forts)

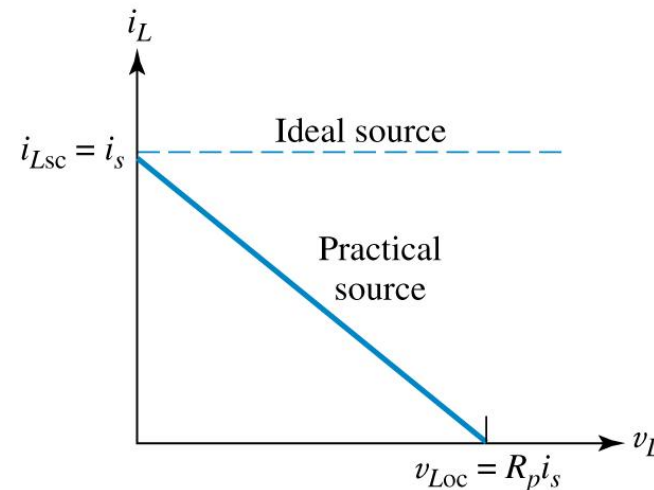
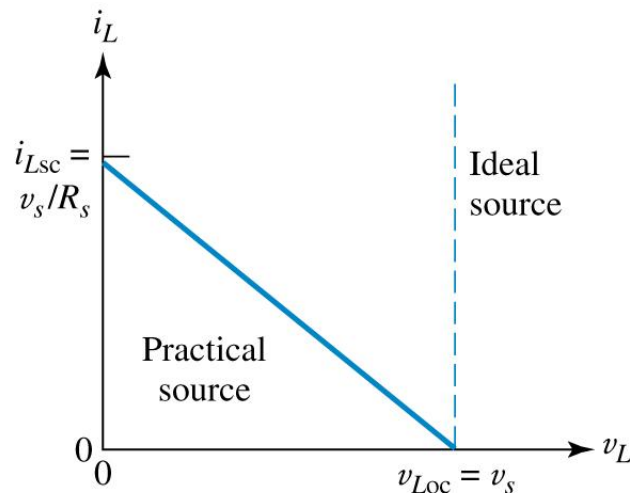
- Som vist i (b) er ikke strømmen i_L uavhengig av spenningen v_L lenger
- Minst strøm har vi når $V_L=0$, og mest strøm når $R_p = \infty$
- Strømmen den praktiske kilden kan levere er

$$i_L = i_s - \frac{V_L}{R_p}$$



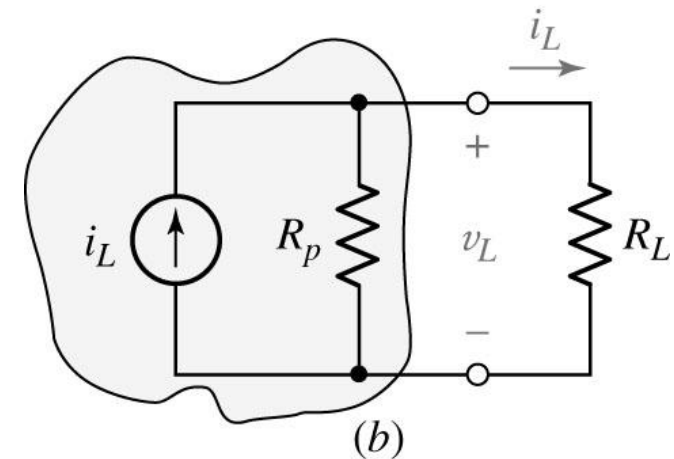
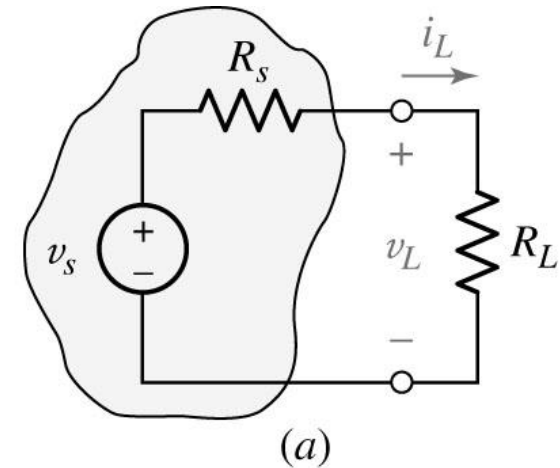
Ekvivalente praktiske kilder

- To kilder kalles ekvivalente hvis de leverer identiske verdier for v_L og i_L når de er koblet til identiske verdier for R_L for alle verdier av R_L
- Legg merke til strøm-spenningskarakteristikkene for hhv praktiske spennings- og strømkilder



Ekvivalente praktiske kilder (forts)

- Hvis man gjør en sort-boks analyse (dvs finner strøm-spenningsforholdet uten å kjenne selve kretsen), vil man ikke se forskjell på en praktisk strømkilde (a), og en praktisk spenningskilde (b)
- Med andre ord er praktiske strøm- og spenningskilder ekvivalente sett fra utsiden (dvs over/gjennom terminalene)





Ekvivalente praktiske kilder (forts)

- Spenningen over en praktisk spenningskilde er

$$v_L = v_s \frac{R_L}{R_s + R_L}$$

- Spenningen over en praktisk strømkilde er

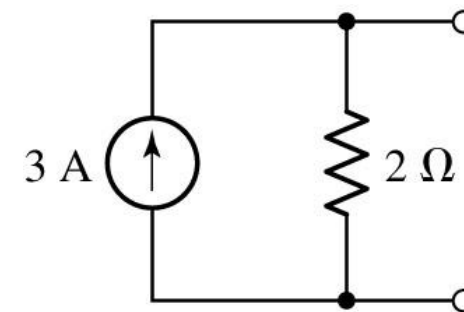
$$v_L = i_L R_L = \left(i_s \frac{R_p}{R_L + R_p} \right) R_L$$

- Siden v_L er lik for de to kildene må

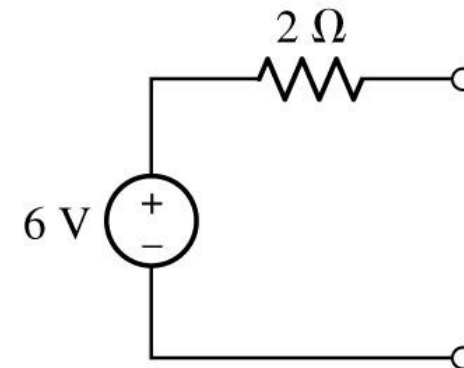
$$v_s \frac{R_L}{R_s + R_L} = \left(i_s \frac{R_p}{R_L + R_p} \right) R_L \Rightarrow v_s = i_s R_s = i_s R_p$$

Ekvivalente praktiske kilder (forts)

- Kobler på lastmotstand $R_L=4\Omega$ på de to kildene til høyre
- Spenningen $v_L=4V$ for begge kildene
- Strømkilde leverer en effekt
 $p_{cs}=i_s \cdot v_L=3A \cdot 4V=12W$
- Spenningskilde leverer en effekt på
 $p_{vs}=v_s^2/R=6v \cdot 6v/(2+4)\Omega=6w$
- De to ideelle kildene må derfor levere *ulik* effekt internt for å levere *samme* effekt eksternt



(a)



(b)

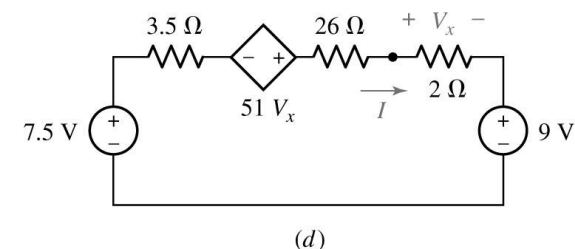
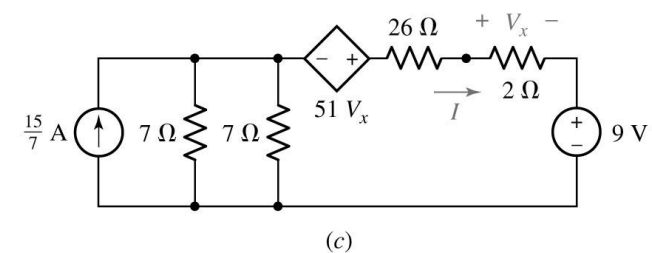
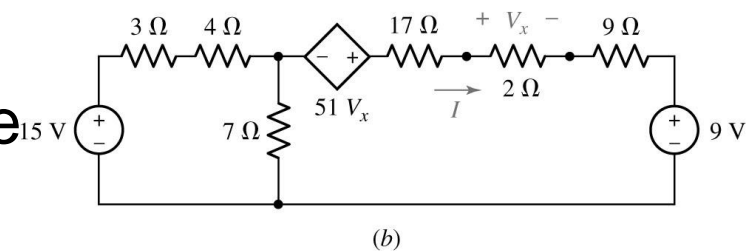
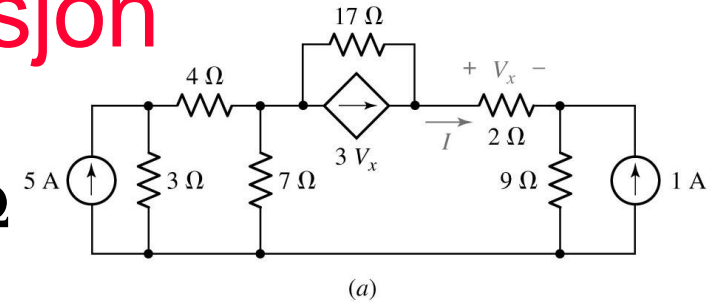


Oppsummerig kildetransformasjon

- Ofte kan en krets forenkles ved å bytte ut en praktisk kilde med en annen
- Hvis man ønsker å transformere en kildetype med en annen må følgende være oppfylt:
 - Motstanden må være i serie med spenningskilden
 - Motstanden må være i parallell med strømkilden

Eksempel kildetransformasjon

- Ønsker å finne strømmen I gjennom 2Ω motstanden
- Benytter sammenhengen $v_s = i_s R_s = i_s R_p$
- Legg merke til at man kan transformere samme kilde flere ganger
- Serielle og parallelle motstander kan slås sammen, så lenge strømmene gjennom og spenningene over enkeltelementet ikke er relevant.
- Bruker tilslutt KVL og Ohms lov for å finne strømmen I

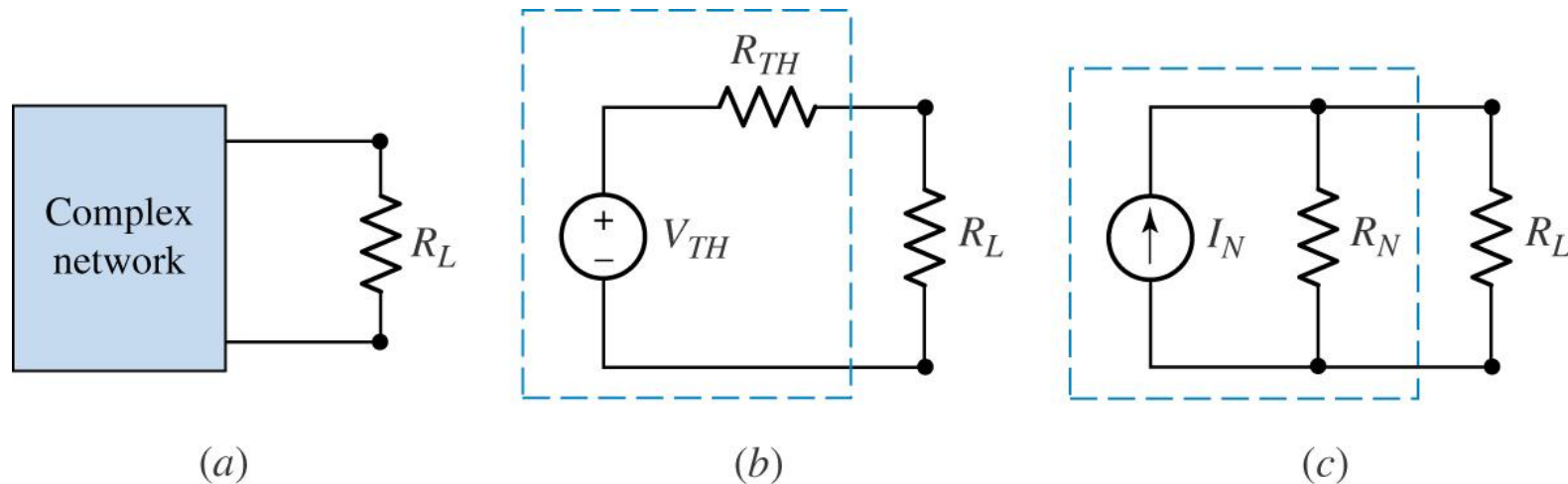




Thévenin og Norton-ekvivalente kretser

- Ofte er man interessert i å analysere kun en del av en stor og komplisert krets
- Ved å benytte enten Thévenins eller Nortons teorem, kan man erstatte "uinteressante" delen av kretsen med en enklere ekvivalent krets
- Antar at den "interessante" delen består av en lastmotstand
- Den uinteressante delen kan erstattes av enten
 - en ideel spenningskilde i serie med en motstand eller
 - en ideel strømkilde i parallell med en motstand

Thévenin og Norton-ekvivalente kretser



- Figur a) viser nettverket so kan erstattes med enten en Thévenin-ekvivalent krets b), eller en Norton-ekvivalent krets c)



Thévenins og Nortons teoremer

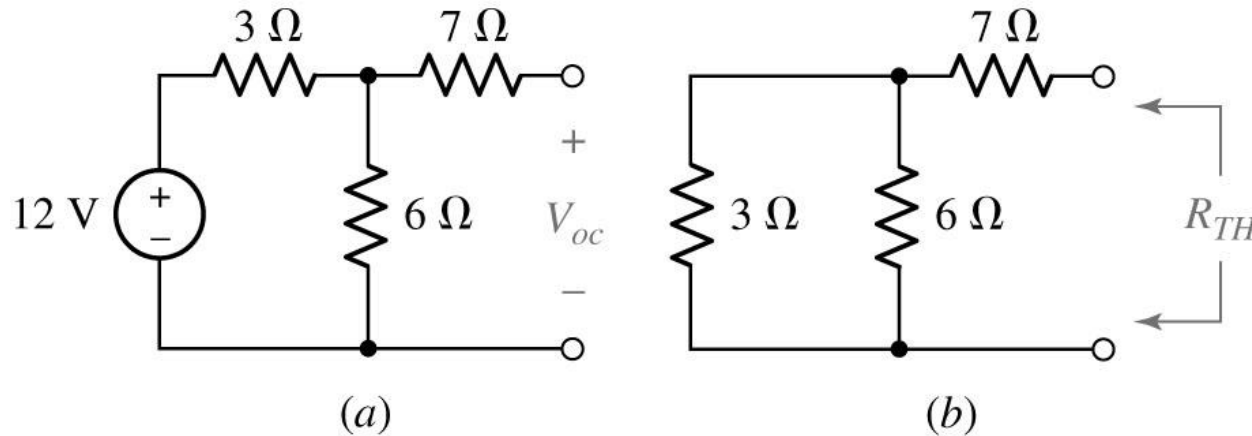
- Kildetransformasjon kan brukes til å finne en Thévenin- eller Norton-ekvivalent krets for den uinteressante delen
- Imidlertid vil dette bli komplisert hvis kretsen inneholder mange elementer eller avhengige kilder.
- Thévenins og Nortons teoremer gir en lettere vei til de tilsvarende ekvivalente kretsene



Thévenins teorem

- Start med å dele opp kretsen i to deler A og B, hvor B er delen som skal analyseres videre og A er delen som skal erstattes med ekvivalenten
- Må finne spenningen V_{OC} (dvs. V_{TH}) og motstanden R_{TH} til ekvivalenten for del A
 - Koble A og B fra hverandre og finn spenningen V_{TH} som nå er over terminalene mellom A og B
 - Skru av alle uavhengige kilder i A for å få et passivt nettverk
 - Finn motstanden R_{TH} som er ekvivalent til motstandene i A
- Del A erstattes med spenningskilden V_{OC} i serie med motstanden R_{TH} dvs Théveninekvivalenten

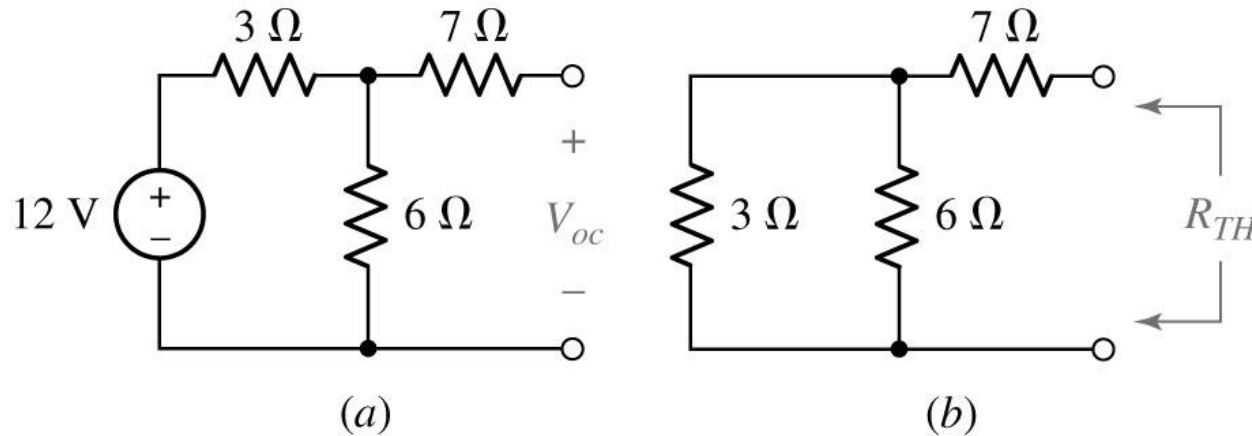
Eksempel Thévenins teorem



- Skal finne Théveninekvivalenten for kretsen over
- Finner først v_{oc} : Ingen strøm gjennom 7 Ω motstanden; 3 Ω og 6 Ω motstandene danner en spenningsdeler der

$$v_{oc} = 12v \frac{6}{3+6} = 8V$$

Eksempel Thévenins teorem (forts)



- Kortslutter så 12V kilden for å finne ekvivalentmotstanden

$$R_{TH} = 7\Omega + (3\Omega || 6\Omega) = 9\Omega$$

- Kretsen kan derfor erstattes med en 8V spenningskilde i serie med en 9 Ω motstand (Théveninekvivalenten)



Nortons teorem (forts)

- Nortons teorem sier hvordan man kan finne Nortonekvivalenten for en krets(del)
- Teoremet er tilsvarende som Thévenins, bortsett fra at man skal finne en ekvivalent strømkilde i_{sc} istedenfor spenningskilde
- Sammenhengen mellom en Norton og Thévenin-ekvivalent krets finnes ved kildetransformasjon
- Sammenhengen mellom strøm- og spenningskilden er gitt av

$$v_{oc} = R_{TH} i_{sc}$$

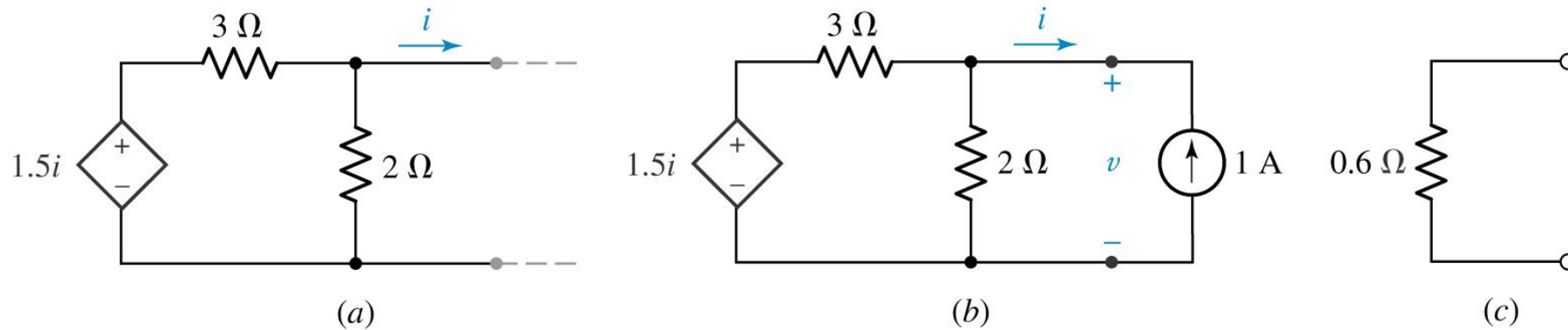


Kretser med avhengige kilder

- Hvis kretsen man skal inneholder avhengige kilder, må man sørge for at
 - Kontrollstrømmer/spenninger for Norton/Thévenin-delen (krets A) ikke er definert i lastdelen (krets B)
 - Kontrollstrømmer/spenninger for krets B ikke er definert i krets A
- Hvis dette ikke er mulig, kan man heller ikke finne ekvivalenten
- Man ønsker å fjerne avhengige kilder slik at ekvivalenten kun har en uavhengig kilde og en motstand
- Med avhengige kilder er det ikke alltid enkelt å finne R_{TH} hvis de avhengige kildene ikke kan deaktiveres

Eksempel med avhengig kilde

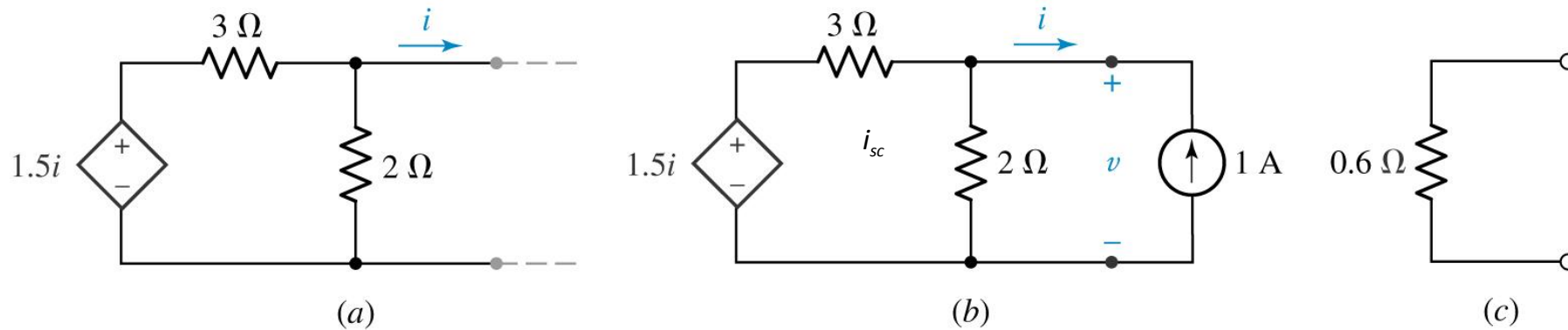
- Ønsker å finne Thévenin-ekvivalenten for kretsen i a)



- Siden det ikke går noe strøm ($i=0$), er den avhengige spennings-kilden allerede nullet ut, derfor er også $v_{oc}=0$
- R_{TH} kan ikke finnes siden både strøm og spenning=0

Eksempel med avhengig kilde

- Triks: Setter inn en 1A uavhengig kilde på utgangen (fig b)



- Da kan man finne $R_{TH} = \frac{v}{1A}$
- Finner først v med nodeanalyse: $\frac{v - 1.5(-1)}{3} + \frac{v}{2} = 1 \Rightarrow v = 0.6V$
- Dette gir da at $R_{TH} = \frac{0.6V}{1A} = 0.6\Omega$