Sekventkalkyle for første ordens predikatlogikk uten likhet

Tilleggslitteratur til INF1800

Versjon 29/9 07

Vi definerer sekventer for predikatlogikk på samme måte som i utsagnslogikk. En sekvent består fremdeles av en antesedent og en suksedent – begge sekvenser av formler – plassert henholdsvis før og etter symbolet $\Rightarrow$, og som før er sekventen gyldig hviss det ikke fins en tolkning som gjør alle formler i antesedenten sanne og alle formler i suksedenten gale. Forskjellen er at vi nå har en annen type formler, med en annen type tolkninger. Logisk konsekvens erstatter nå begrepet tautologisk konsekvens; en formel er en **logisk konsekvens** av en mengde formler hviss den er sann i alle tolkninger hvor alle formlene i mengden er sanne. En sekvent i predikatlogikk er dermed gyldig hviss disjunksjonen av formlene i suksedenten er en logisk konsekvens av formlene i antesedenten.

1 Litt om kvantorer og substitusjon

Vi skal også definere en beviskalkyle, altså et system av aksiomer og slutningsregler. Dette systemet vil gjøre oss i stand til å bevise alle gyldige sekventer, og bare disse. Også dette systemet er altså komplett og sunt. Definisjon av de forskjellige slutningsreglene kommer lenger ute. Som motiverende innledning ser vi først på noen gyldige sekventer – altså sekventer vi ønsker som teoremer i sekventkalkylen – og prøve å si noe mest mulig systematisk om hvorfor de er gyldige.

La P være hvilket som helst unært predikatsymbol, x hvilken som helst variabel og t hvilken som helst term. Semantikken for allkvantor og eksistenskvantor er laget slik at sekventene under er gyldige.

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(t) \tag{1}$$

$$P(t) \Rightarrow \exists x P(x) \tag{2}$$

Dette er greit å vite, men det går an å si noe mer generelt som gjelder for $\forall xA$ og $\exists xA$ når A er hvilken som helst (gjerne lang og sammensatt) formel. Her er andre tilfeller som vi vil ha dekket. Husk at vi bruker a,b,c, osv. for konstanter og x,y,z, osv. for variabler.

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (P(c) \vee Q(c))$
2. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists yR(x,y)) \Rightarrow (P(c) \rightarrow \exists yR(c,y))$
3. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge \exists zR(y,z))) \Rightarrow (P(c) \rightarrow \exists y(R(c,y) \wedge \exists zR(y,z)))$
4. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge \exists xR(y,x))) \Rightarrow (P(c) \rightarrow \exists y(R(c,y) \wedge \exists xR(y,x)))$

Alt dette er spesialtilfeller av

$$\forall xA \Rightarrow A(x/c), \tag{3}$$

i hvert tilfelle med A og $A(x/c)$ som i tabellen under:

	A	$A(x/c)$
1.	$(P(x) \vee Q(x))$	$(P(c) \vee Q(c))$
2.	$(P(x) \rightarrow \exists yR(x,y))$	$(P(c) \rightarrow \exists yR(c,y))$
3.	$(P(x) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge \exists zR(y,z)))$	$(P(c) \rightarrow \exists y(R(c,y) \wedge \exists zR(y,z)))$
4.	$(P(x) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge \exists xR(y,x)))$	$(P(c) \rightarrow \exists y(R(c,y) \wedge \exists xR(y,x)))$

Merk spesielt at vi nederst til høyre *ikke* har $(P(c) \rightarrow \exists y(R(c,y) \wedge \exists xR(y,c)))$, siden $A(x/c)$ er resultatet av å sette inn c for alle *frie* forekomster av x i A. Dette er viktig, for sekventen

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge \exists xR(y,x))) \Rightarrow (P(c) \rightarrow \exists y(R(c,y) \wedge \exists xR(y,c)))$$

er ikke gyldig. (3) er derimot gyldig, uansett hvilken formel A er. Det samme gjelder speilbildet

$$A(x/c) \Rightarrow \exists xA. \tag{4}$$

Vi ser at (1) og (3) ligner, men ingen av dem er et spesialtilfelle av den andre. Begge er derimot spesialtilfeller av

$$\forall xA \Rightarrow A(x/t). \tag{5}$$

Setter vi inn en atomær formel for A i (5) får vi (omtrent) (1), og setter inn en konstant for t får vi (3). Tilsvarende er (2) og (4) spesialtilfeller av

$$A(x/t) \Rightarrow \exists xA \tag{6}$$

Spørsmålet nå er om (5) og (6) alltid er gyldige, uansett hvilken formel A og hvilken term t vi har med å gjøre. Svaret er et betinget Ja: Begge er gyldige, så lenge det ikke skjer noe "uventet" når vi setter inn t for x i A. Her er et slikt eksempel hvor det uventede skjer: Hvis A er den sammensatte formelen $\exists y R(x,y)$ og t er variabelen y, får vi $\exists y R(y,y)$ når vi setter inn t for de frie forekomstene av x i A:

$$\exists y R(x,y)(x/y) = \exists y R(y,y),$$

og sekventen (5) blir da

$$\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists y R(y,y).$$

Når domenet er de naturlige tallene og R tolkes som *mindre enn,* er formelen til venstre sann og formelen til høyre gal, så denne sekventen er ikke gyldig.

Det er åpenbart hva som gikk galt: Formelen $\forall x \exists y R(x,y)$ uttrykker at alle elementer har en bestemt egenskap, nemlig å være R-relatert til minst ett element. Vi sier altså ingenting spesielt om y, vi har bare tilfeldigvis brukt y som bundet variabel da vi skrev formelen. Men i og med at gjenbruk av variabler er lov, kan vi komme i en situasjon der vi ønsker å si at også y har denne egenskapen. I eksempelet prøver vi å gjøre dette ved å sette inn y for x, og da skjer det fatale: Vi får en *variabelkollisjon*, der to like variabelforekomster som ikke har noe med hverandre å gjøre, plutselig dukker opp i den samme sammenhengen, og vi får rot, kaos og forvirring.

Trøsten er at alt går bra så lenge vi er på vakt for slike variabelkollisjoner. Nærmere bestemt er (5) og (6) gyldige når t er *fri for* x i A:

Definisjon 1 Termen t er **fri for** variabelen x i formelen A dersom ingen fri forekomst av x i A er innenfor skopet til en kvantor som binder en av variablene i t.

Det er akkurat dette som skjer når vi substituerer y for x i $\exists y R(x,y)$: x har en fri forekomst innenfor skopet til kvantoren $\exists y$.

Definisjonen over kan gis på mange ekvivalente måter. Vi kan alternativt si at hvis det fins en variabel i t som også brukes i en kvantor i A, da må x ikke ha noen fri forekomst innenfor skopet til denne kvantoren.[1] I (1) og (2) er dette automatisk sikret fordi A der ikke inneholder kvantorer, og i (3) og (4) er det automatisk sikret fordi t ikke inneholder variabler.

[1]Hvis du har sett lærebokens errataliste på nettet (husk å sjekke denne!) gjenkjenner dette som den rettede definisjonen av *free to replace* som vi finner nederst side 433.

2 Litt naturlig deduksjon

Alternative bevissystemer har ulike fordeler. I utsagnslogikk så vi at det ofte er lettere å sette opp bevis i sekventkalkyle, mens det er lettere å *forstå* bevis skrevet i naturlig deduksjon. Det samme gjelder i predikatlogikk. Vi begynner derfor med en gjennomgang av to av kvantorreglene i bokens system for naturlig deduksjon. Den ene regelen, *Universell instansiering,* svarer direkte til den gyldige sekventen vi diskuterte i forrige avsnitt:

$$\frac{\forall x A}{A(x/t)} \tag{UI}$$

Betingelsen er at t er fri for x i A. Dette er regelen for fjerning av allkvantorer. Det fins også en regel for introduksjon av slike kvantorer. Den går under navnet *Universell Generalisering:*

$$\frac{A(x/y)}{\forall x A} \tag{UG}$$

Her er betingelsen at y er fri for x i A, og at y ikke forekommer fri i $\forall x A$ eller i noen av premissene.[2] Intuitivt begrunner vi UG-regelen med at hvis vi kan slå fast at A må gjelde for y, uten at vi vet noe som helst spesielt om y, da må A faktisk gjelde for alle elementer.[3]

Vi bruker disse reglene i to eksempler. Først beviser vi $\forall x Q(x, f(x))$ fra $\forall x R(x, f(x))$ og $\forall x \forall y (R(x, y) \to Q(x, y))$. Her *kan* vi tolke R og Q som *mindre enn* og *forskjellig fra,* med de naturlige tallene som domene, og tolke f som *etterfølgerfunksjonen,* det vil si funksjonen som legger 1 til argumentet sitt: Siden hvert tall er mindre enn sin etterfølger, er det også forskjellig fra sin etterfølger. Men egentlig er poenget at beviset holder uansett tolkning.

[2] Boken nevner også noen betingelser på samtidig bruk av regelen EI, men dette kan vi trygt ignorere her. Vår UG-regel er for øvrig mer generell enn bokens, hvor y må være x selv.

[3] Litt mer formelt kan vi argumentere for at hvis $\forall x A$ er gal i en tolkning hvor alle premissene er sanne, da fins det per definisjon et element i domenet som vi kan velge å navngi som c, slik at også $A(x/c)$ er gal. Hvis nå y er en variabel uten frie forekomster i $\forall x A$ (og dermed også uten frie forekomster i $A(x/c)$) eller i premissene, da kan vi fritt tolke y og c likt uten at $\forall x A$, $A(x/c)$ eller premissene skifter sannhetsverdi. Siden c og y tolkes likt, vil $A(x/c)$ og $A(x/y)$ ha samme sannhetsverdi, nemlig F. Altså, hvis ikke $\forall x A$ følger fra premissene, så gjør ikke $A(x/y)$ det heller. Og dermed kontrapositivt: Hvis $A(x/y)$ følger fra premissene, så gjør $\forall x A$ det også.

1	$\forall x \forall y (R(x,y) \to Q(x,y))$	P
2	$\forall x R(x, f(x))$	P
3	$R(v, f(v))$	2,UI
4	$\forall y (R(v,y) \to Q(v,y))$	1, UI
5	$R(v, f(v)) \to Q(v, f(v))$	4, UI
6	$Q(v, f(v))$	5,3, MP
7	$\forall x Q(x, f(x))$	6, UG

Neste eksempel kan vi tolke som et bevis for at hvert tall er mindre enn etterfølgeren til etterfølgeren sin, men igjen er bevis uavhengig av tolkning.

1	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$	P
2	$\forall x R(x, f(x))$	P
3	$R(v, f(v))$	2,UI
4	$R(f(v), f(f(v)))$	2,UI
5	$R(v, f(v)) \wedge R(f(v), f(f(v)))$	3,4,Conj
6	$\forall y \forall z (R(v,y) \wedge R(y,z) \to R(v,z))$	1, UI
7	$\forall z (R(v, f(v)) \wedge R(f(v), z) \to R(v,z))$	6, UI
8	$R(v, f(v)) \wedge R(f(v), f(f(v))) \to R(v, f(f(v)))$	7, UI
9	$R(v, f(f(v)))$	8,4,MP
10	$\forall x R(x, f(f(x)))$	9, UG

Begge bevis ender med bruk av UG. I begge tilfeller går vi fra $A(x/v)$ til $\forall x A$, der v er en variabel uten frie forekomster i $\forall x A$ eller premissene. Vi ser også at v i begge tilfeller er fri for x i A, siden ingen kvantorer noen steder binder v.

Faktisk har vi brukt et vanlig lite triks som på en enkel måte gjør at vi slipper å tenke noe særlig på kravet om at "term skal være fri for variabel i formel": Før vi begynner å skrive beviset, deler vi "forrådet" av variabler i to, og etterpå bruker vi den ene delen til bundne variabler og den andre til frie. For å gjøre dette ekstra tydelig, kan man gjerne bruke forskjellige bokstaver for de to gruppene. I resten av dette notatet bruker vi u, v, w, osv. for variabler som vi lover oss selv at vi aldri skal binde.

3 Sekventkalkyle: Første forsøk

Vi prøver nå å gjøre om bevisene fra forrige avsnitt til bevis i en sekventkalkyle. Eksistenskvantoren ble ikke brukt der, og vi skal inntil videre fortsette med å holde den utenfor. Et første forsøk på "oversettelse" av UI og UG til sekventkalkyle gir oss henholdsvis $v\forall$ og $H\forall$. (Liten v i $v\forall$ flagger allerede nå at denne regelen ikke er tilstrekkelig, og at den må erstattes av noe vi skal skrive som $V\forall$. Og da gjetter man kanskje at $H\forall$ er grei som den er?)

$$(v\forall) \qquad \frac{\Gamma, A(x/t), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \forall x A, \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/y), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A, \Pi} \qquad (H\forall)$$

Som ellers må y og t være frie for x i A. I $H\forall$ skal y dessuten ikke forekomme fri noen steder i sekventen under streken, altså ikke i $\forall xA$ og ikke i Γ, Δ eller Π.

Vi ser tydelig likheten mellom UG og $H\forall$. For å finne likheten mellom de to andre, kan vi tenke oss en situasjon der vi vil bevise noe (kall det gjerne Π) fra $\forall xA$, og hvor vi ser at det kan være en idé å gjøre bruk av spesialtilfellet $A(x/t)$. I naturlig deduksjon gjør vi dette enkelt og bruker UI direkte, mens vi i sekventkalkylen erstatter $\forall xA$ med $A(x/t)$ i antesedenten og deretter prøver å bevise den nye sekventen vi får. Effekten kan bli det samme i det to tilfellene. I hvert fall kan vi oversette det første beviset nokså direkte. Vi har tidligere tegnet beviser i sekventkalkyle som trær, men det er ingenting i veien for å bruke samme format som for naturlig deduksjon:

1	$R(v, f(v)) \Rightarrow Q(v, f(v)), R(v, f(v)$	Aksiom
2	$Q(v, f(v)), R(v, f(v)) \Rightarrow Q(v, f(v))$	Aksiom
3	$R(v, f(v)) \to Q(v, f(v)), R(v, f(v)) \Rightarrow Q(v, f(v))$	1,2, $V \to$
4	$\forall y(R(v, y) \to Q(v, y)), R(v, f(v)) \Rightarrow Q(v, f(v))$	3, $v\forall$
5	$\forall x \forall y(R(x, y) \to Q(x, y)), R(v, f(v)) \Rightarrow Q(v, f(v))$	4, $v\forall$
6	$\forall x \forall y(R(x, y) \to Q(x, y)), \forall x R(x, f(x)) \Rightarrow Q(v, f(v))$	5, $v\forall$
7	$\forall x \forall y(R(x, y) \to Q(x, y)), \forall x R(x, f(x)) \Rightarrow \forall x Q(x, f(x))$	6, $H\forall$

Vi ser at det er et en-til-en forhold mellom bruk av UI i ND-beviset og $V\forall$ i sekventbeviset, og tilsvarende mellom UG of $H\forall$. En oversettelse av det andre ND-beviset burde munne ut i et bevis for sekventen

$$\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)), \forall x R(x, f(x)) \Rightarrow \forall x R(x, f(f(x))),$$

men her viser det seg at vi må melde pass. Det beste vi får til med reglene over, er et bevis for en oppblåst versjon med to kopier av $\forall x R(x, f(x))$ i antesedenten. Et litt mangelfullt bevis er tegnet opp under. På toppen finner vi en sekvent uten kvantorer som er gyldig i utsagnslogikk, og som derfor kan bevises bare med konnektivreglene. Siden det ikke er tema nå, er denne toppen klippet bort. Resten av beviset er med. Her brukes $v\forall$ hver gang unntatt til slutt, hvor vi bruker $H\forall$.

$$R(v,fv) \land R(fv,ffv) \to R(v,ffv)), R(v,fv), R(fv,ffv) \Rightarrow R(v,ffv)$$

$$\forall z(R(v,fv) \land R(fv,z) \to R(v,z)), R(v,fv), R(fv,ffv) \Rightarrow R(v,ffv)$$

$$\forall y \forall z(R(v,y) \land R(y,z) \to R(v,z)), R(v,fv), R(fv,ffv) \Rightarrow R(v,ffv)$$

$$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)), R(v,fv), R(fv,ffv) \Rightarrow R(v,ffv)$$

$$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)), \forall x R(x,fx), R(fv,ffv) \Rightarrow R(v,ffv)$$

$$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)), \forall x R(x,fx), \forall x R(x,fx) \Rightarrow R(v,ffv)$$

$$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)), \forall x R(x,fx), \forall x R(x,fx) \Rightarrow \forall x R(x,ffx)$$

For å spare plass og dessuten bedre lesbarheten, har vi droppet parentesene rundt argumentet til f. Vi skriver altså fv og ffv for henholdsvis $f(v)$ og $f(f(v))$.

Også denne gangen er det et 1-1-forhold mellom anvendelser av kvantorreglene i de to bevisene, og dette er faktisk nøkkelen til hvorfor vi ble nødt til å blåse opp sekventen for å kunne bevise den. I ND-beviset brukes UI to ganger direkte på formelen $\forall x R(x, fx)$ i linje 2, med innsetting av forskjellige termer, og resultatene i linje 3 og 4. I sekventbeviset gjør vi det samme ved å anvende $v\forall$ to ganger, på hver sin kopi av den samme formelen.

Andre gyldige sekventer vil – hvis vi skal holde fast ved $v\forall$ – behøve ytterlige oppblåsning før vi kan bevise dem. Faktisk er det ingen grense for hvor mange kopier det kan være nødvendig å legge til: Tenk på et tall, og det vil fins en gyldig sekvent som ikke blir bevisbar før vi har kopiert opp noen av formlene i denne sekventen minst så mange ganger som tallet sier.

Dermed kan vi like godt la kopieringen bli en del av regelen. I neste avsnitt presenterer vi den endelige versjonen, der to av reglene har innebygd kopiering.

4 Sekventkalkyle: Komplett versjon

Vi ta nå for oss den endelige versjonen av sekventkalkyle. Den inneholder aksiomene og alle reglene fra utsagnslogikk, og i tillegg to regler for hver kvantor:

$$(V\forall)\quad \frac{\Gamma, \forall x A, A(x/t), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \forall x A, \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/y), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A, \Pi}\quad (H\forall)$$

$$(V\exists)\quad \frac{\Gamma, A(x/y), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \exists x A, \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A, A(x/t), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A, \Pi}\quad (H\exists)$$

Som alltid før må y og t være frie for x i A. I $H\forall$ og $V\exists$ skal y dessuten ikke forekomme fri noen steder i sekventen under streken.

Vi kjenner igjen et mønster fra utsagnslogikk: Akkurat som en $\wedge$ i antesedenten oppfører seg akkurat som en $\vee$ i suksedenten og omvendt, ser vi at reglene for $\forall$ og $\exists$ på samme måte er nøyaktige speilbilder av hverandre.

Dette systemet er sunt og komplett: Det går bare an å bevise gyldige sekventer, og alle gyldige sekventer kan bevises.[4]

Vi tar ikke med noe bevis for kompletthet, men tar oss likevel tid til å kikke litt på hvorfor dette er vanskeligere å bevise her enn det var i utsagnslogikk. I utsagnslogikk hvilte beviset på fire grunnsteiner:

0. En gyldig sekvent uten forekomster av konnektiver er et aksiom.
1. Alle reglene bevarer gyldighet begge veier.
2. Enhver sekvent som inneholder minst en forekomst av et konnektiv, vil matche sekventen under streken i minst en regel.
3. I hver regel er alle sekventer over streken enklere enn sekventen under streken.

Dette gir umiddelbart en *bevisalgoritme* for gyldige sekventer: See først etter om sekventen vi har fått inn er et aksiom. Hvis Ja, er vi ferdige. Hvis Nei vil sekventen, forutsatt at den er gyldig, inneholde minst en forekomst av et konnektiv. I så fall finner vi en regel vi kan bruke baklengs, og som gir oss enklere, gyldige sekventer. Oppgaven er nå forenklet til å bevise hver av disse.

Samtidig gir dette også en *avgjørelsesalgoritme* for å sjekke om en vilkårlig sekvent er gyldig: Gjør som over, og svar Ja hvis du ender opp med bare aksiomer og Nei hvis du noe sted kommer til en sekvent uten konnektiver som likevel ikke er et aksiom.

Når vi tar skrittet inn i predikatlogikk, må vi skrive "konnektiv eller kvantor" der vi ovenfor bare skrev "konnektiv". Hvordan står det nå til med hver av de fire punktene? Det burde være greit å se at de tre første fremdeles er

[4]Kompletthet forutsetter at vi holder oss med separate forråd av frie og bundne variabler, slik vi antydet lenger oppe. Gjør vi det, vil vi aldri komme ut for sekventer som $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists z R(y,z)$. Denne er opplagt gyldig, men prøv å bevise den!

oppfylt. Problemet er den fjerde. I og med at vi har bygget inn kopiering i $V\forall$ og $H\exists$, vil vi oppleve at sekventen vokser når vi bruker disse reglene baklengs. Det er altså på dette punktet at et enkelt kompletthetsbevis av typen vi kjenner fra utsagnslogikk ville brutt sammen.

Til tross for dette er algoritmene ovenfor fremdeles interessante. De kan fremdeles følges, problemet er bare at vi kanskje ikke er sikret at de vil stoppe, det vil si at vi (eller helst programmet vi kjører) kan bli sittende i en uendelig løkke hvor vi hele tiden prøver å bevise eller sjekke mer og mer kompliserte sekventer, uten noen gang å bli ferdige.

Vi sier gjerne at vi utfører **bevissøk** når vi setter i gang algoritmer som dem over. For å gjøre slike søk mest mulig rasjonelle, kan vi legge inn betingelser på rekkefølgen som skal brukes når ulike alternativer utforskes. Dette kan gi uttelling allerede i utsagnslogikk: Når vi prøver å bevise

$$A \wedge B \Rightarrow B \wedge A,$$

finner vi to regler som kan anvendes baklengs. Den ene gir to nye sekventer, den andre bare en. Da er det en god idé å bruke den siste, siden vi da etterpå fremdels bare har én sekvent å bevise. Velger vi motsatt, og går videre med både $A \wedge B \Rightarrow B$ og $A \wedge B \Rightarrow A$ må vi deretter bruke den andre regelen to ganger, på hver av disse sekventene.

Samme fenomen dukker opp i forbindelse med kvantorregler, bare mer dramatisk. Spesielt vil vi her alltid ha spørsmålet om *hvilken* term t det kan være lurt å sette inn for x når vi bruker reglene $V\forall$ og $H\exists$ baklengs. Det er umulig å sette opp noe generelt prinsipp som alltid forteller oss hvilken t det er aller lurest å bruke, selv om det fins mange fornuftige tommelfingerregler. Hvis vi vil være garantert å finne et bevis for en vilkårlig, gyldig sekvent, er stikkordet *rettferdige* søkestrategier. Det betyr at vi går frem på en slik måte at alt før eller siden prøves ut. Hver eneste formel som dukker opp må før eller siden matches mot en regel, og hver $\forall xA$ på venstresiden og $\exists xA$ på høyresiden brukes sammen med den aktuelle regelen på *alle mulige termer* som kan bygges opp ved hjelp av konstanter og frie variabler som forekommer andre steder. Siden det kan finnes uendelig mange slike termer, innebærer det siste at vi må sette opp en uendelig venteliste for termer som fungerer slik at hver eneste term får sin plass et sted på listen. Siden det kan være flere $\forall xA$ på venstresiden og/eller $\exists yA$ på høyresiden, må vi dessuten sørge for at de forskjellige ventelistene betjenes "rettferdig" i forhold til hverandre, slik at det hele tiden er bevegelse i alle.

Mye gjenstår for å beskrive dette i tilstrekkelig detalj. Her nøyer vi oss med å konstatere at det er mulig å lage en bevisalgoritme som returnerer et korrekt bevis for en hvilken som helst gyldig sekvent vi mater inn. Kompletthet for systemet følger selvfølgelig umiddelbart fra dette.

Hva så med en avgjørelsesalgoritme som går gjennom de samme trinnene, men i stedet svarer Ja/Nei, avhengig av om det som ble matet inn var gyldig eller ikke? Det er ikke noe i veien for å sette i gang en slik algoritme, og hver gang vi får et svar vil det også være korrekt. Problemet er at den i mange tilfeller aldri vil få nok tid til å gjøre jobben sin. Hvis sekventen vi putter inn ikke er gyldig, kan vi risikere at algoritmen aldri oppdager dette, men bare fortsetter i all evighet å lete gjennom lengre og lengre bevis. Dermed vil den aldri gi noe svar.

Oppgave 1 Hva kan du si om egenskapene 0., 1., 2. 3. i forhold til det første forsøket på sekventkalkyle for predikatlogikk?