Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Tilleggslitteratur til INF1800

Versjon 11. september 2007

1 Hva er en sekvent? Hva er en gyldig sekvent?

Sekventkalkyle er en alternativ type bevissystem hvor man – i stedet for å regne med enkeltformler – regner med hele uttrykk som sier at noe følger fra noe annet. Sekventkalkyle ble (i likhet med systemer for naturlig deduksjon nokså likt det som beskrives i boken) introdusert av Gerhard Gentzen, som levde fra 1909 til 1945. Det finnes mange varianter av sekventkalkyle, her ser vi på et enkelt system for vanlig utsagnslogikk. Uttrykket

$$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R) \tag{1}$$

er en sekvent. (Legg merke til at vi sier og skriver sekven**t** og ikke sekven**s**.) Denne sekventen sies å være **gyldig** fordi

$$(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

er en tautologi, altså fordi $(P \rightarrow R)$ følger tautologisk fra $(P \rightarrow Q)$ og $(Q \rightarrow R)$. En annen sekvent er følgende:

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V) \tag{2}$$

Legg merke til formatet i den siste: Det er lov å skrive mer enn en formel både foran og bak $\Rightarrow$. Denne sekventen er også gyldig. Det følger av definisjon 2 nedenfor.

Definisjon 1 En **sekvent** er et uttrykk av typen $\Gamma \Rightarrow \Delta$, der Γ og Δ er sekvenser av formler.

Boken bruker vanlige runde parenteser for å angi sekvenser, så av dette skulle det følge at $(A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow (B_1, \ldots, B_m)$ er en sekvent hvis $A_1, \ldots, A_n$ og $B_1, \ldots, B_m$ er formler. For lesbarhetens skyld skriver vi vanligvis dette som $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$. Lengdene på sekvensene $(A_1, \ldots, A_n)$ og

$(B_1, \ldots, B_m)$ (altså tallene n og m) kan være hva som helst fra 0 og oppover. Hvis n er 0 skriver vi sekventen som $\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$, hvis m er 0 skriver vi $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$, og hvis begge er 0 skriver vi bare $\Rightarrow$.

Definisjon 2 Vi sier at sekventen $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er **gyldig** hviss[1] $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

Sekventen (2) er altså gyldig fordi

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$$

er en tautologi. (Jeg venter ikke at du ser dette uten videre. Det er ikke nødvendig. Vi beviser det nedenfor!) Definisjon 2 sier altså at vi tar konjunksjonen av formlene på venstresiden og disjunksjonen av dem på høyresiden, setter implikasjon mellom, og sier at dette skal være en tautologi. Hva så med sekventer med tom venstreside og/eller tom høyreside? For å gi mening til dette, må vi bli enige om hva konjunksjonen og disjunksjonen av *ingen* formler er for noe. Etter litt grubling vil man komme frem til at dette må være henholdsvis *true* og *false*. (En konjunksjon er lettere å gjøre sann jo færre ledd den har, og med null ledd er den alltid sann. Omvendt med disjunksjon.) Vi bestemmer derfor at

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss $(B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ er en tautolgi, at

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ er en kontradiksjon, og at

$\Rightarrow$ *ikke* er gyldig.

I neste avsnitt ser vi på hvordan gyldige sekventer kan bevises. Følgende observasjon er nyttig for å forstå hvorfor bevisreglene ser ut slik de gjør. De to "halvpartene" av en sekvent før og etter $\Rightarrow$ kaller vi henholdsvis **antesedenten** og **suksedenten**.

Observasjon 1 *Sekventen $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig*

1. *hviss $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi, og*
2. *hviss $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m$ er en kontradiksjon, og*
3. *hviss det ikke finnes noen valuasjon (linje i sannhetverditabellen) som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle formlene i suksedenten gale*

[1] Vi bruker *hviss* som en forkortelse for *hvis og bare hvis*. Dette er noe man opprinnelig fant på på engelsk, der *iff* står for *if and only if*. Se for øvrig side 10 i læreboken.

Hvert enkelt av disse tre betingelsene kunne altså like godt vært brukt i definisjon 2 i stedet for den betingelsen som faktisk står der (la oss kalle den 0), altså at $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B_1 \vee \ldots \vee B_m$ skal være en tautologi. 0,1,2,3 sier altså det samme, la oss gå gjennom et argument for dette i spesialtilfellet der $n = m = 1$. Da sier

0 og 1 det samme fordi $A_1 \to B_1$ er ekvivalent med $\neg A_1 \vee B_1$, og

1 og 2 det samme fordi noe er en tautologi hviss negasjonen er en kontradiksjon, og fordi $\neg(\neg A_1 \vee B_1)$ er ekvivalent med $(\neg\neg A_1 \wedge \neg B_1)$, som igjen er ekvivalent med $(A_1 \wedge \neg B_1)$, og

2 og 3 det samme fordi noe (pr definisjon) er en kontradiksjon hviss ingen valuasjon gjør den sann. $(A_1 \wedge \neg B_1)$ er dermed en kontradiksjon hviss ingen valuasjon gjør A_1 sann og B_1 gal.

Oppgave 1 Argumenter på lignende måte for at 0,1,2,3 sier det samme også i det generelle tilfellet.

2 Hva er en bevisbar sekvent?

Vi vil bruke store greske bokstaver som Γ, Δ, Π og Θ for å betegne vilkårlige (muligens tomme) sekvenser av formler. A, B, C etc. betegner vilkårlige formler. Når vi skriver Γ, Δ og lignende, mener vi sekvensene vi får ved å konkatenere Γ og Δ, altså "lime dem sammen" i den viste rekkefølgen. Tilsvarende kan vi skrive for eksempel Γ, A, Δ for å angi sekvensen som begynner som Γ, ender som Δ, og har A imellom.

Aksiomer

Aksiomene i sekventkalkylen er alle sekventer av typen $\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi, A, \Theta$, altså alle sekventer der antesedenten og konskeventen har en felles formel.

Slutningsregler

Vi skriver slutningsreglene i samme format som vi brukte for ND1800. Forskjellen er at mens vi der avledet nye formler fra gamle formler, avleder vi nå nye sekventer fra gamle sekventer:

$$(V\mathit{false}) \qquad \frac{}{\Gamma, \mathit{false}, \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathit{false}, \Pi} \qquad (H\mathit{false})$$

$$(V\mathit{true}) \qquad \frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \mathit{true}, \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathit{true}, \Pi} \qquad (H\mathit{true})$$

$$(V\neg) \qquad \frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi} \qquad (H\neg)$$

$$(V\wedge) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi} \qquad (H\wedge)$$

$$(V\vee) \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Pi} \qquad (H\vee)$$

$$(V \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Pi} \qquad (H \rightarrow)$$

Hver regel har et navn som angis i parentes i margen. Vi ser at alle navn består av H eller V (for *Høyre* eller *Venstre*), kombinert med et konnektiv. I regelen H$\vee$ inneholder høyresiden (suksedenten) under streken en formel som er bygget opp ved hjelp av $\vee$ fra enklere formler i sekventene over streken, og det samme mønsteret går igjen i alle reglene: De kommer i par, en for forekomster av hvert konnektiv på venstresiden (i antesedenten), og en annet for forekomster av samme konnektiv på høyresiden (i suksedenten).

Teoremer

Reglene brukes til å avlede nye sekventer fra gamle. For å anvende en regel, setter vi inn konkrete formler for A og B, og konkrete sekvenser av formler for Γ, Δ, etc. Gjør vi dette i $H\wedge$, kan vi få

$$\frac{V, ((P \vee Q) \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow (R \wedge V)) \qquad V, ((P \vee Q) \rightarrow R) \Rightarrow (Q \rightarrow (R \wedge V))}{V, ((P \vee Q) \rightarrow R) \Rightarrow ((P \rightarrow (R \wedge V)) \wedge (Q \rightarrow (R \wedge V)))}$$

Her har vi altså satt inn $V, ((P \vee Q) \rightarrow R)$ for Γ, den tomme sekvensen for Δ og Π, og $(P \rightarrow (R \wedge V))$ og $(Q \rightarrow (R \wedge V))$ for henholdsvis A og B. Når vi har funnet et slikt "spesialtilfelle" av en regel, med konkrete sekventer over og under streken, kan vi **avlede** sekventen under streken fra dem over streken. Et **teorem** er nå en sekvent som kan avledes fra aksiomene ved hjelp av slutningsreglene i null eller flere trinn. Konkret sier vi at mengden av teoremer er definert som følger:

1. Alle aksiomer er teoremer.

2. Hvis man ved hjelp av en regel kan avlede en sekvent fra teoremer, så er denne sekventen også et teorem.

3. Noe er et teorem bare hvis det følger av punktene over.

Vi sier at en sekvent er **bevisbar** hvis og bare hvis den er et teorem. Et **bevis** er en oppstilling som viser hvorfor noe er et teorem, altså noe som viser hvordan sekventen kan avledes fra aksiomer ved hjelp av slutningsreglene. De enkleste bevisene består bare av et aksiom alene, for eksempel $Q, P, V \Rightarrow Q, R$ eller $R, P, V \Rightarrow Q, R$. Med utgangspunktet i dette kan man så bygge opp lengre beviser. Trestrukturen på neste side er et bevis for sekventen

$$\Rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V).$$

Denne sekventen er plassert nederst, i **roten** av treet. Hver sekvent i treet har linjer oppover til ingen, en eller to andre sekventer. Vi sier at disse andre sekventene er **barnene** til den aktuelle sekventen. Sekventer som ikke har barn, sies å være **løv**. Vi ser at alle løvene er aksiomer. Alle sekventer som ikke er løv, kan avledes fra sine barn ved hjelp av en slutningsregel. Den aktuelle slutningsregelen er i hvert tilfelle angitt mellom sekventene. Nederst i dette beviset finner vi en sekvent med tom antesedent og bare en formel i suksedenten. Slike sekventer er gyldige hviss denne formelen er en tautologi. Eksempelet viser nytten av å tillate sekventer med flere formler på hver side selv om vi til syvende og sist kanskje bare er interessert i å bevise sekventer av denne spesielle typen. Sekvent nummer fire nedenfra kjenner vi igjen som (2) fra innledningen.

$$Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad R, P, V \Rightarrow Q, R$$

$$\color{magenta}{V\lor}$$

$$(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad P, V \Rightarrow Q, R, P$$

$$\color{magenta}{V\to}$$

$$(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R$$

$$\color{magenta}{H\land}$$

$$(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R \qquad\qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V$$

$$\color{magenta}{H\land}$$

$$(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$\color{magenta}{V\land}$$

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$\color{magenta}{H\lor}$$

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

$$\color{magenta}{V\land}$$

$$(P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

$$\color{magenta}{H\to}$$

$$\Rightarrow (P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \to (Q \land V) \lor (R \land V)$$

3 Alle teoremer er gyldige

Hvis man ser nærmere på sekventene som forekommer i beviset over, ser man at alle sammen er gyldige. Bevissystemet er laget slik: Det går bare an å bevise gyldige sekventer. Denne egenskapen ved et bevissystem kaller vi gjerne for **sunnhet**. (Det motsatte ville være et "usunt" bevissystem, som gjør oss i stand til å bevise mer enn vi burde.)

Det er ikke så veldig vanskelig å se hvorfor dette bevissystemet er sunt: For det første er alle aksiomene gyldige, og for det andre er reglene laget slik at de **bevarer gyldighet**: Hvis alle sekventer over streken er gyldige, så er sekventen under streken også gyldig. Dermed vil vi aldri være i stand til å bevise annet enn gyldige sekventer, uansett hvor lenge vi holder på.

For å se at det faktisk er sant at alle reglene bevarer gyldighet, må man ta dem for seg en etter en. Her skal vi nøye oss med å se på $V\lor$. Vi skal benytte oss av et triks som er nokså vanlig i slike beviser. I stedet for argumentere rett frem, altså for at

hvis både $\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi$ og $\Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi$ er gyldige,

så er $\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi$ gyldig,

skal vi gå i motsatt retning med de motsatte betingelsen, altså slik:

Hvis $\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi$ ikke er gyldig,

så er det ikke tilfellet at bade $\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi$ og $\Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi$ er gyldige.

Resultatet blir det samme. Grunnen er at $(P \rightarrow Q)$ og $(\neg Q \rightarrow \neg P)$ er ekvivalente. Dette kalles gjerne **den kontrapositive lov.**

La oss ta fatt. Vi antar altså at $\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi$ ikke er en gyldig sekvent. I så fall må det finnes en valuasjon som gjør $(A \vee B)$ og alle formlene i Γ og Δ sanne, mens den gjør alle formlene i Π gale. (Dette er punkt 3 i observasjon 1.) Siden $(A \vee B)$ er sann i denne valuasjonen, vil A eller B (eller begge) også være det. I det første tilfellet viser denne valuasjonen at $\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi$ ikke er gyldig, i det andre tilfellet viser den at $\Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi$ ikke er det.

4 Alle gyldige sekventer er teoremer

Det viser seg også at alle gyldige sekventer er teoremer. Bevissystemet er altså kraftig nok til at alle gyldige sekventer lar seg bevise ved hjelp av aksiomene og reglene i systemet. Denne egenskapen ved et bevissystem kaller vi gjerne for **kompletthet**.

For å forstå hvorfor bevissystemet er komplett, skal vi lege merke til tre ting. Når disse tre tingene er på plass, kan man nokså enkelt argumenter for kompletthet.

1 Slutningsreglene bevarer gyldighet også motsatt vei.

Hver gang sekventen under streken er gyldig, så er også alle sekventer over streken gyldige. Vi går ikke i detalj her, men dette kan sjekkes på samme måte som vi skisserte for $V\vee$ i motsatt retning i forrige avsnitt.

2 Enhver sekvent som inneholder minst en forekomst av et konnektiv, vil "matche" det som står under streken i minst en regel.

Matche betyr her at det er mulig å sette inn konkrete formler og mengder av formler for symbolene A, B, Γ, Δ etc. i regelen slik at sekventen vi har blir lik sekventen under streken i regelen. Tenk deg nå at du har en sekvent med minst en forekomst av et konnektiv. Da vil det også måtte finnes et konnektiv ytterst i en formel. Det betyr at en av formlene i antesedenten eller en av formlene i suksedenten er enten på formen *fals* eller *true* eller $(A \vee B)$ eller $(A \wedge B)$ eller $(A \to B)$. La oss si det er i antesedenten, og la oss si at formelen er $(A \vee B)$. Kanskje står den først, kanskje sist, og kanskje midt inni antesedenten. Uansett kan vi kalle sekvensen av formler foran for Γ, dem bak for Δ, og hele suksedenten for Π. Tilsvarende kan gjøres for de andre konnektivene, på begge sider av sekventen. Dermed vil vi alltid finne en regel vi kan bruke "baklengs" på sekventen, såfremt den bare inneholder et konnektiv.

3 Hver enkelt sekvent over streken i en regel inneholder færre forekomster av konnektiver enn sekventen under streken.

Det vi mener er selvsagt at dette vil gjelde uansett hva som settes inn for A, B, Γ, Δ, etc. Vi ser direkte fra reglene at dette er tilfelle.

For å bevise kompletthet, gjenstår det bar å sette disse tre bitene sammen. Vi skal bruke et såkalt **induksjonbevis**. Det går som følger:

Basis Hvis en sekvent er gyldig og ikke inneholder noen forekomster av konnektiver, da er den bevisbar.

Induksjonstrinn For alle positive heltall n,

hvis *(IH)* alle gyldige sekventer med færre enn n forekomster av konnektiver er bevisbare,

så er alle gyldige sekventer med nøyaktig n forekomster av konnektiver bevisbare.

Konklusjon Altså er alle gyldige sekventer bevisbare.

Det er ikke så vanskelig å se at konklusjonen følger fra basis og induksjonstrinnet. (Enhver sekvent inneholder et eller annet endelig antall forekomster av konnketiver.) Det som gjenstår er å se hvorfor basis og induksjonstrinn begge er korrekte:

Bevis for basis

I en sekvent uten forekomster av konnektiver, vil alle formlene (både i antesedenten og suksedenten) være utsagnsvariabler. Hvis en slik sekvent er gyldig, må den nødvendigvis inneholde en felles utsagnsvariabel i antesedenten og suksedenten, altså være et aksiom, for i motsatt fall kan vi finne en valuasjon som gjør alle utsagnsvariablene i antesedenten sanne og alle utsagnsvariablene i suksedenten gale, og da ville ikke sekventen være gyldig likevel.

Bevis for induksjonstrinnet

La n være et vilkårlig tall større enn null, og anta at (IH) er sann. (IH står for *induksjonshypotesen*.) Vi ser nå på en vilkårlig, gyldig sekvent med nøyaktig n forekomster av konnektiver. Det vil da (ved punkt 2 over) finnes minst en regel vi kan bruke "baklengs" (nedenfra og opp) på sekventen. De tilsvarende sekventene over streken i samme regel vil da (ved punkt 1 over) være gyldige. Hver av disse sekventene inneholder (ved punkt 3 over) færre forekomster av konnektiver. Fra antagelsen (IH) kan vi nå fastslå at disse må være bevisbare. Men dermed er også sekventen under streken bevisbar.

5 Bevissøk

Vi kan nå undersøke om en sekvent er gyldig ved å prøve å bevise den: Det enkleste tilfellet er sekventer uten forekomster av konnektiver. Her det bare å sjekke om de er aksiomer eller ikke. Hvis sekventen inneholder et eller flere konnektiver, kan vi anvende en regel nedenfra og opp. Over streken i regelen vil vi da finne enklere sekventer[2] som vi så prøver å bevise hver for seg. Klarer vi det, har vi til sammen et bevis for den opprinnelige sekventen.

Dette gir en prosess som kan fortsette i lang tid mens vi hele tiden prøver å bevise enklere og enklere sekventer. Men nettopp fordi sekventene hele

[2] Poenget er ikke at vi nødvendigvis finner noen sekventer der (altså over streken) i det hele tatt, men at dem vi eventuelt finner helt sikkert er enklere. Hvis regelen vi har brukt er $V\mathit{false}$ eller $H\mathit{true}$, vil det ikke være noen formler over streken, og vi vil følgelig ikke behøve å gjøre noe mer; denne sekventen vil da være ferdig bevist.

tiden blir enklere, må denne prosessen til slutt stoppe, enten med et bevis for den opprinnelige sekventen, eller med en konklusjon om at sekventen ikke er bevisbar.

Vi prøver altså bygge et bevis *baklengs*, fra konklusjonen og bakover mot aksiomer. Eller vi kan tenke på det på motsatt måte mens vi holder på: For å overbevise oss selv om at dette er en gyldig sekvent, gjør vi oss til "djevelens advokat" og prøver - tvert imot - å finne en valuasjon hvor alle formler i antesedenten er sanne og alle i suksedenten er gale. Lykkes vi med dette, må vi etterpå innrømme at sekventen ikke var gyldig. Men lykkes vi ikke, kan vi deretter slå fast at sekventen var gyldig.

Alle reglene kan leses slik. La oss ta utgangspunkt i beviset lenger fremme, og tenke oss at det ble til på denne måten:

1. Jeg vil gjøre $(P \to (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \to (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$ gal.
2. Da må jeg gjøre $(P \to (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V)$ sann og $(Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$ gal.
3. Da må jeg gjøre $(P \to (Q \vee R))$ og $(P \wedge V)$ sanne og $(Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$ gal.
4. Da må jeg gjøre $(P \to (Q \vee R))$ og $(P \wedge V)$ sanne og $(Q \wedge V)$ og $(R \wedge V)$ gale.
5. Da må jeg gjøre $(P \to (Q \vee R))$ og P og V sanne og $(Q \wedge V)$ og $(R \wedge V)$ gale.
6. Da må jeg **enten**

   gjøre $(P \to (Q \vee R))$ og P og V sanne og $(Q \wedge V)$ og R gale, **eller**
   gjøre $(P \to (Q \vee R))$ og P og V sanne og $(Q \wedge V)$ og V gale.

Oppgave 2 Fullfør "tankerekken"over.

Oppgave 3 Bevis sekventen (1) på første side. Bygg beviset baklengs slik vi har skissert her.

Oppgave 4 Oppgaven over har flere løsninger. Vi kan velge hvilken forekomst av $\to$ vi skal ta vekk først når vi går bakover i beviset.

1. Skriv opp minst ett annet bevis.
2. Prøv å tenke ut hvor mange forskjellige beviser denne sekventen har.

3. Betyr det noe for resultatet hvilket konnektiv vi velger å ta vekk først når vi går bakover? Begrunn svaret.

4. Noen av de mulige bevisene for (1) inneholder færre sekventer enn andre. Hvorfor? Kan du ut fra dette formulere en tommelfingerregel om hvordan det er lurest å gå fram hvis man ønsker et enklest mulig bevis?

Oppgave 5 Prøv å bevise

$$\Rightarrow (P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \to (Q \land V) \land (R \land V)$$

ved å bygge et bevis bakover fra sekventen. Du vil til slutt ende opp med et tre der minst ett løv bare inneholder utsagnsvariabler i antesedenten og suksedenten, uten at det er et aksiom. Forklar, i det konkrete tilfellet, hvorfor denne sekventen kan brukes til å finne en valuasjon som gjør den opprinnelige sekventen gal.