UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF1800 — Logikk og beregnbarhet
Eksamensdag:	15. desember, 2008
Tid for eksamen:	09:00 – 12:00

LØSNINGSFORSLAG.

Oppgave 1 (10 %)

Her er sannhetsverditabellen for F og G.

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$\to$	R	$(P \to R)$	$\vee$	$(Q \to R)$
1	1	1	1	1		1	1	1
1	1	0	1	**0**		**0**	**0**	**0**
1	0	1	0	1		1	1	1
1	0	0	0	1		**0**	1	1
0	1	1	0	1		1	1	1
0	1	0	0	1		1	1	**0**
0	0	1	0	1		1	1	1
0	0	0	0	1		1	1	1

Sekventen $F \vdash G$ er gyldig når enhver valuasjon som gjør F sann, også gjør G sann. Det er tilfellet her, fordi enhver rad i sannhetsverditabellen som er slik at $v(F) = 1$ også er slik at $v(G) = 1$. Den kritiske raden er rad 2, hvor $v(G) = 0$, men her er også $v(F) = 0$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P, Q \vdash R, P} \qquad \overset{\times}{R, P, Q \vdash R}}{P \to R, P, Q \vdash R}\,\mathsf{L}{\to} \qquad \dfrac{\overset{\times}{P, Q \vdash R, Q} \qquad \overset{\times}{R, P, Q \vdash R}}{Q \to R, P, Q \vdash R}\,\mathsf{L}{\to}}{(P \to R) \vee (Q \to R), P, Q \vdash R}\,\mathsf{L}{\vee}}{(P \to R) \vee (Q \to R), P \wedge Q \vdash R}\,\mathsf{L}{\wedge}}{(P \to R) \vee (Q \to R) \vdash (P \wedge Q) \to R}\,\mathsf{R}{\to}}{}
$$

Oppgave 2 (10 %)

(a) Hva er en *valuasjon*? En valuasjon er en funksjon fra utsagnsvariable til $\{0, 1\}$ som, når utvidet til sammensatte formler, forteller om en formel er sann eller usann.

(b) Hva er en *sekvent*? En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av formler.

(c) Hva vil det si at en førsteordens formel er *gyldig*? En førsteordens formel er gyldig hvis den er sann i alle modeller.

(d) Hva vil det si at en kalkyle er *komplett*? En kalkyle er komplett hvis enhver gyldig sekvent er bevisbar i kalkylen.

Oppgave 3 (15 %)

(a) Bevis. Her står A for $\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$ og A' for $\forall y(Ray \to \neg Rya)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ A, A', Raa \vdash Raa\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\times\\ A, A', Raa \vdash Raa\end{array}}{A, A', \neg Raa, Raa \vdash}\,\mathrm{L}\neg}{A, A', Raa \to \neg Raa, Raa \vdash}\,\mathrm{L}{\to}}{A, \forall y(Ray \to \neg Rya), Raa \vdash}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx), Raa \vdash}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx) \vdash \neg Raa}\,\mathrm{R}\neg}{\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx) \vdash \forall x \neg Rxx}\,\mathrm{R}\forall
$$

(b) Ikke bevis. Den åpne grenen gir opphav til en modell $\mathcal{M}$ med domene $\{a, b\}$ slik at $a^{\mathcal{M}} = a$ og $b^{\mathcal{M}} = b$ og $R^{\mathcal{M}} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \neg Rxx, Rab, Rba \vdash Raa, Rbb}{\forall x \neg Rxx, \neg Rbb, Rab, Rba \vdash Raa}\,\mathrm{L}\neg}{\forall x \neg Rxx, Rab, Rba \vdash Raa}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x \neg Rxx, \neg Raa, Rab, Rba \vdash}\,\mathrm{L}\neg}{\forall x \neg Rxx, Rab, Rba \vdash}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x \neg Rxx, Rab \vdash \neg Rba}\,\mathrm{R}\neg}{\forall x \neg Rxx \vdash Rab \to \neg Rba}\,\mathrm{R}{\to}}{\forall x \neg Rxx \vdash \forall y(Ray \to \neg Rya)}\,\mathrm{R}\forall}{\forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)}\,\mathrm{R}\forall
$$

(c) Bevis. Her står F for $\exists x(Px \to Pa \wedge Pb)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ Pa \vdash F, Pa\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ Pa, Pb \vdash F, Pa \wedge Pb, Pb\end{array}}{Pa \vdash F, Pb \to Pa \wedge Pb, Pb}\,\mathsf{R}{\to}}{Pa \vdash F, Pb}\,\mathsf{R}\exists}{Pa \vdash F, Pa \wedge Pb}\,\mathsf{R}\wedge}{\vdash F, Pa \to Pa \wedge Pb}\,\mathsf{R}{\to}}{\vdash \exists x(Px \to Pa \wedge Pb)}\,\mathsf{R}\exists$$

(d) Ikke bevis. Den åpne grenen til venstre gir opphav til en modell $\mathcal{M}$ med domene $\{a, b, c\}$ slik at $x^{\mathcal{M}} = x$ og $P^{\mathcal{M}} = \{c\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pc \vdash Pa \qquad Pc \vdash Pb}{Pc \vdash Pa \wedge Pb}\,\mathsf{R}\wedge}{\vdash Pc \to Pa \wedge Pb}\,\mathsf{R}{\to}}{\vdash \forall x(Px \to Pa \wedge Pb)}\,\mathsf{R}\exists$$

Oppgave 4 (15 %)

(a) Alle har stemt på noen. $\forall x \exists y Sxy$

(b) Ingen har stemt på seg selv. $\neg\exists x Sxx$ eller $\forall x \neg Sxx$

(c) Det fins en som ikke har blitt stemt på av noen. $\exists x \forall y \neg Syx$ eller $\exists x \neg \exists y Syx$

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $\{a, b, c\}$ slik at $x^{\mathcal{M}} = x$ og $S^{\mathcal{M}} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$.

Oppgave 5 (15 %)

(a) $aab \in L(ab(a+b)^*)$? **Nei**

(b) $aab \in L((a+b)^*ab)$? **Ja**

(c) $\Lambda \in L((ab(a+b)^*) + ((a+b)^*ab))$? **Nei**

(d) $abba \in L((ab(a+b)^*) + ((a+b)^*ab))$? **Ja**

(e) $abba \in L((ab(a+b)^*)((a+b)^*ab))$? **Nei**

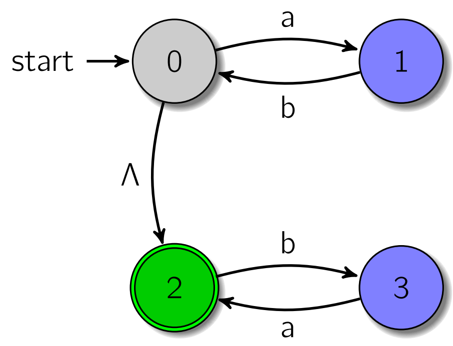
(f) $L((a+b)^*) \subseteq L((a^*b^*)^*)$? **Ja**

(g) $L((a^*b^*)^*) \subseteq L((a+b)^*)$? **Ja**

(h) $L(\Lambda + a^* + aa^*) = L(\Lambda aa^* + \Lambda aaa^*)$? **Nei**

Oppgave 6 (15 %)

		a	b	Λ
start	0	{1}	$\emptyset$	{2}
	1	$\emptyset$	{0}	$\emptyset$
final	2	$\emptyset$	{3}	$\emptyset$
	3	{2}	$\emptyset$	$\emptyset$

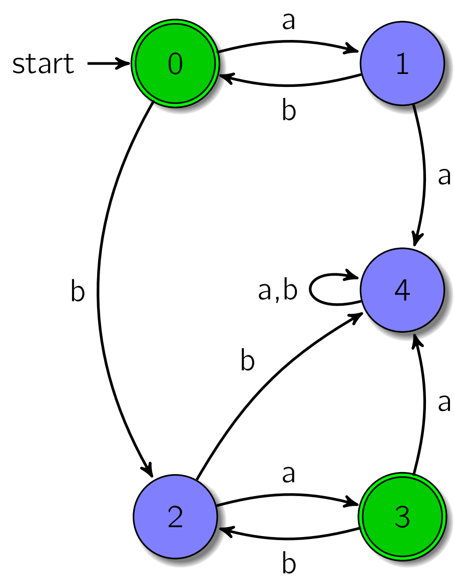


(a) Er det slik at $ababba \in L$? **Ja**
Er det slik at $babaab \in L$? **Nei**
Er det slik at $\Lambda \in L$? **Ja**

(b) Gi et regulært uttrykk R slik at $L(R) = L$. $(ab)^*(ba)^*$

(c) Gi en deterministisk endelig tilstandsautomat som aksepterer L.

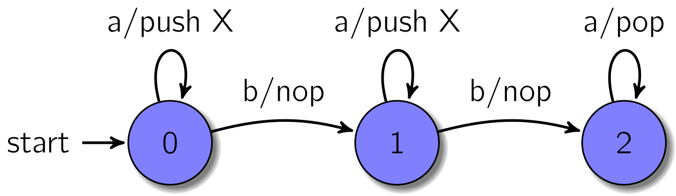
		a	b
final,start	0	1	2
	1	4	0
	2	3	4
final	3	4	2
	4	4	4



Oppgave 7 (10 %)

La $L = \{a^n b a^m b a^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$.

(a) Gi en pushdown-automat som gjenkjenner språket L.
Følgende er en skisse av pushdown-automaten. Formelt sett skal den inneholde flere detaljer (avhengig av hvor nøyaktig og detaljert man skal være), men denne fanger inn essensen og er tilstrekkelig for å få full uttelling på oppgaven.



(b) Gi en kontekstfri grammatikk som genererer språket L.

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aSa \mid bT \\
T &\rightarrow aTa \mid b
\end{aligned}
$$

(c) Vis at L ikke er et regulært språk. Hint: "pumpelemmaet".

Anta at L er regulært.

Ved "pumpelemmaet" finnes det et fast tall m med følgende egenskap: For enhver streng w i L som er lenger enn m, så finnes det strenger x, y og z slik at

(a) $w = xyz$
(b) $y \neq \Lambda$
(c) $xy^n z \in L$ for alle $n \geq 0$.

Strengen $a^m b a^m b a^{2m}$ er med i L og er opplagt lenger enn m. Dermed *skal det finnes* x, y og z slik at

(a) $a^m b a^m b a^{2m} = xyz$
(b) $y \neq \Lambda$
(c) $xy^n z \in L$ for alle $n \geq 0$.

Men det er lett å se at slike x, y og z *ikke kan finnes*. Hvis y inneholder b'er: vi har $xy^2z \notin L$ siden xy^2z inneholder mer enn to b'er. Hvis y inneholder kun a'er: a'ene i y må stamme fra den første, den midterste eller den siste blokken av a'er; uansett hvilken blokk a'ene stammer fra, så har vi $xy^2z \notin L$.

Oppgave 8 (10 %)

- $L_1 = \{uv \mid u \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_b v)\}$
- $L_2 = \{uv \mid u, v \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_a v)\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_b v) = (\#_a v)\}$

Språket $L_1 = \{uv \mid u \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_b v)\}$ kan gjenkjennes av en pushdown-automat. Først pusher automaten et tegn $*$ på stakken for hver a som leses. Automaten skifter (ikkedeterministisk) til en ny tilstand uten å røre stakk eller input. I denne nye tilstanden popper automaten et tegn $*$ på stakken for hver a som leses; når en b leses, arbeider automaten videre uten å røre stakken.

Språket L_1 er kontekstfritt siden det kan gjenkjennes av end pushdown-automat.

Alternativt svar: Grammatikken

$$S \to aSAbA \mid \Lambda \qquad\qquad A \to aA \mid \Lambda$$

(med startsymbol S) genererer L_1. Dermed er L_1 et kontekstfritt språk.

Språket L_1 er ikke regulært. Dette kan man vise ved å bruke "pumpelemmaet" for kontekstfrie språk. Vis f.eks. at man ikke kan pumpe i en streng på formen $a^n b^n$.

Språket $L_2 = \{uv \mid u, v \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_a v)\}$ er regulært siden vi har $L_2 = L((aa)^*)$. Man kan også vise at L_2 er regulært ved å gi en endelig tilstandsautomat som gjenkjenner L_2.

Språket $L_3 = \{uv \mid u \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_b v) = (\#_a v)\}$ er ikke kontekstfritt.

Anta at L_3 er kontekstfritt. La L' være språket gitt med det regulære uttrykket $a^*b^*a^*$. Snittet av et regulært språk og et kontekstfritt språk er et kontekstfritt språk. (Det står i læreboken.) Dermed er $L' \cap L_3$ et kontekstfritt språk. Vi har

$$L' \cap L_3 = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\} .$$

Det er relativt enkelt å vise at $\{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\}$ ikke er kontekstfritt ved å bruke "pumpelemmaet" for kontekstfrie språk. Dermed leder antagelsen om at L_3 er et kontekstfritt språk til en selvmotsigelse. Vi konkluderer med at L_3 ikke er kontekstfritt.