# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i | INF1800 — Logikk og beregnbarhet |
| Eksamensdag: | 15. desember, 2008 |
| Tid for eksamen: | 09:00 – 12:00 |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

# DEL 1 – LOGIKK (50%)

## Oppgave 1 (10 %)

Følgende utsagnslogiske formler er gitt.

$F$: $(P \land Q) \to R$

$G$: $(P \to R) \lor (Q \to R)$

(a) Vis at sekventen $F \vdash G$ er gyldig ved hjelp av en sannhetsverditabell. Forklar hvorfor sannhetsverditabellen viser at sekventen er gyldig.

(b) Gi bevis i sekventkalkyle for sekventen $G \vdash F$.

## Oppgave 2 (10 %)

Svar kort på følgende spørsmål. (Maksimalt to linjer per svar.)

(a) Hva er en *valuasjon*?

(b) Hva er en *sekvent*?

(c) Hva vil det si at en førsteordens formel er *gyldig*?

(d) Hva vil det si at en kalkyle er *komplett*?

*(Fortsettes på side 2.)*

## Oppgave 3 (15 %)

For hver av sekventene under, forsøk å lage et sekventkalkylebevis for sekventen, eller, hvis det ikke går, bruk informasjonen fra en åpen gren til å lage en modell som falsifiserer sekventen.

(a) $\forall x \forall y (Rxy \to \neg Ryx) \vdash \forall x \neg Rxx$
(b) $\forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y (Rxy \to \neg Ryx)$
(c) $\vdash \exists x (Px \to Pa \land Pb)$
(d) $\vdash \forall x (Px \to Pa \land Pb)$

## Oppgave 4 (15 %)

Finn førsteordens formler for følgende setninger. Du kan anta at $S$ er et relasjonssymbol med aritet 2 slik at $Sxy$ tolkes som *"x har stemt på y"*.

(a) Alle har stemt på noen.
(b) Ingen har stemt på seg selv.
(c) Det fins en som ikke har blitt stemt på av noen.

Gi en endelig modell som oppfyller mengden av alle de tre formlene.

# DEL 2 – BEREGNBARHET (50%)

*Ethvert språk som omtales i denne delen av eksamen er et språk over alfabetet $\{a, b\}$. Alle automater skal tegnes som en graf.*

## Oppgave 5 (15 %)

Besvar hvert spørsmål med ja eller nei. Du trenger ikke å begrunne svarene.

(a) $aab \in L(ab(a+b)^*)$?
(b) $aab \in L((a+b)^*ab)$?
(c) $\Lambda \in L((ab(a+b)^*) + ((a+b)^*ab))$?
(d) $abba \in L((ab(a+b)^*) + ((a+b)^*ab))$?
(e) $abba \in L((ab(a+b)^*)((a+b)^*ab))$?
(f) $L((a+b)^*) \subseteq L((a^*b^*)^*)$?
(g) $L((a^*b^*)^*) \subseteq L((a+b)^*)$?
(h) $L(\Lambda + a^* + aa^*) = L(\Lambda aa^* + \Lambda aaa^*)$?

## Oppgave 6 (15 %)

En ikke-deterministisk endelig tilstandsautomat er gitt ved følgende transisjonstabell.

| | | $a$ | $b$ | $\Lambda$ |
|---|---|---|---|---|
| start | 0 | $\{1\}$ | $\emptyset$ | $\{2\}$ |
| | 1 | $\emptyset$ | $\{0\}$ | $\emptyset$ |
| final | 2 | $\emptyset$ | $\{3\}$ | $\emptyset$ |
| | 3 | $\{2\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

Tabellen viser at automaten består av fire tilstander (0, 1, 2 og 3) hvor kun én tilstand (2) er en finaltilstand. (En finaltilstand har også blitt kalt en *akseptererende* tilstand på forelesningene.) Videre viser tabellen at tilstand 0 er starttilstanden. La $L$ være språket som gjenkjennes av denne automaten.

(a) Er det slik at $ababba \in L$? Er det slik at $babaab \in L$? Er det slik at $\Lambda \in L$? Besvar hvert spørsmål med ja eller nei. Du trenger ikke å begrunne svarene.

(b) Gi et regulært uttrykk $R$ slik at $L(R) = L$.

(c) Gi en deterministisk endelig tilstandsautomat som gjenkjenner $L$. Du trenger ikke å forklare hvordan du har resonnert for å konstruere automaten.

## Oppgave 7 (10 %)

La $L = \{a^n ba^m ba^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$.

(a) Gi en pushdown-automat som gjenkjenner språket $L$.

(b) Gi en kontekstfri grammatikk som genererer språket $L$.

(c) Vis at $L$ ikke er et regulært språk. Hint: "pumpelemmaet".

## Oppgave 8 (10 %)

La $(\#_a w)$ and $(\#_b w)$ betegne henholdsvis antall $a$'er og antall $b$'er i strengen $w$. Vi har f.eks. $(\#_a aaba) = 3$ og $(\#_b aaba) = 1$. De tre språkene $L_1$, $L_2$ og $L_3$ er gitt ved følgende.

- $L_1 = \{uv \mid u \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_b v)\}$
- $L_2 = \{uv \mid u, v \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_a v)\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{a\}^* \text{ og } (\#_a u) = (\#_b v) = (\#_a v)\}$

Ett av språkene er regulært, et annet er kontekstfritt, men ikke regulært, og et er ikke kontekstfritt. Identifiser hvilke språk som er hva, og begrunn svaret ditt.