1.2.5 Vis at $n^5 - n$ er delelig med 5 for alle n.

P_n: $n^5 - n$ er delelig med 5

P_1: $1^5 - 1 = 0$, som er delelig med 5.

Derfor er P_1 sann.

Anta nå at vi har vist at $P_1, P_2, \ldots, P_n$ er sanne.

Vi må nå vise at P_{n+1} også er sann (da må alle P_k være sanne)

P_{n+1}: $(n+1)^5 - (n+1)$ deleleig med 5 ?

$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1$

$= n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$

alle tallene er delelig med 5,

Da er summen også det,

slik at $(n+1)^5 - (n+1)$ er delelig med 5.

$\Rightarrow P_{n+1}$ er sann.

						0		1		0			
$n+1$					0		1		1		0		
$(n+1)^2$				0		1		2		1		0	
$(n+1)^3$			0		1		3		3		1		0
$(n+1)^4$		0		1		4		6		4		1		0
$(n+1)^5$			1		5		10		10		5		1

1.2.2 Vis at $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for alle n.

P_n: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

P_1: VS: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$ HS: $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$

Derfor er P_1 sann.

Anta at $P_1, \dots, P_n$ er vis å være sanne.

Vi skal vise P_{n+1}, dvs. at

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \overset{(P_n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)^2\cdot 6}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$2n^2+7n+6 = 0 \Rightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{49-4\cdot 2\cdot 6}}{4}$$

$$= \frac{-7\pm 1}{4} = -\frac{3}{2} \text{ eller } -2$$

$$\Rightarrow 2n^2+7n+6 = 2\left(n-\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right)(n-(-2)) = 2\left(n+\tfrac{3}{2}\right)(n+2)$$

$$= (2n+3)(n+2)$$

derfor blir høyresiden $\frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$

$$= \frac{(n+1)(2(n+1)+1)((n+1)+1)}{6},$$

og dette viser at P_{n+1} også er sann (fikk samme uttrykk).