UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger
Eksamensdag:	12. desember 2003
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Løsningsforslag

Merk at dette er et forslag til løsning. Flere av oppgavene kan løses på andre måter, og har du gjort det riktig får du fullt hus, selv om du ikke har brukt metoden jeg har vist her. Forøvrig gjelder det vanlige forbeholdet om trykkfeil.

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \sin(-x)$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $x - x^3/6$ ☐ $-x - x^3/6$ ☐ $1 - x^2/2$ ☑ $-x + x^3/6$

☐ $x - x^2/2$

Løsning. Siden $\sin(-x) = -\sin x$ følger det at alternativ 4 er riktig.

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \sqrt{1+x}$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☑ $1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16$ ☐ $1 + x - x^2/2 + x^3/3$

☐ $1 + x/2 + x^2/3 + x^3/4$ ☐ $1 - x/2 + x^2/8 - x^3/16$

☐ $1 + x/2 + x^2/8 + x^3/16$

(Fortsettes på side 2.)

Løsning. Vi har $f(x) = (1+x)^{1/2}$, $f'(x) = (1+x)^{-1/2}/2$, $f''(x) = -(1+x)^{-3/2}/4$ og $f'''(x) = 3(1+x)^{-5/2}/8$ slik at $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$, $f''(0) = -1/4$ og $f'''(0) = 3/8$. Fra dette følger det at

$$T_3 f(x) = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 = 1 + x - x^2/2 + x^3/3.$$

Oppgave 3. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = \int_0^x \sin(u^2)\,du$ om punktet $a = 0$ er

☐ 1 ☐ -1 ☐ $-1/2$ ☑ 0 ☐ $1/6$

Løsning. Vi har $f'(x) = \sin(x^2)$ og $f''(x) = 2x\cos(x^2)$, så $f''(0) = 0$. Dermed er alternativ 4 riktig.

Oppgave 4. Bernsteinpolynomene $b_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$, der $0 \le i \le n$ og $n \ge 0$, har egenskapen

☐ $\sum_{i=0}^n b_{i,n}(x) = 2$ ☐ $b'_{i,n}(x) = 0$ for alle $x \in [0,1]$

☑ $\sum_{i=0}^n b'_{i,n}(x) = 0$ for alle $x \in [0,1]$ ☐ $b'_{i,n}(1) = 1/2$

☐ $b'_{i,n}(x) \le -2$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Løsning. Bernstein-polynomene har egenskapen $\sum_{i=0}^n b_{i,n}(x) = 1$. Derivererer vi denne relasjonen får vi formelen i alternativ 3.

Oppgave 5. Differensialligningen $y' + 2xy = 2x$ har løsningen

☐ $y(x) = 1 + Cx$ ☐ $y(x) = -1 + x + Ce^{-x^2/2}$

☐ $y(x) = x + Ce^{-x}$ ☐ $y(x) = 2x + Ce^{x}$ ☑ $y(x) = 1 + Ce^{-x^2}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Løsning. Integrerende faktor er $F(x) = e^{x^2}$. Multipliserer vi med denne får vi

$$(e^{x^2} y)' = 2xe^{x^2}.$$

Integrasjon gir så

$$e^{x^2} y = \int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} + C$$

slik at $y(x) = 1 + Ce^{-x^2}$.

Oppgave 6. Differensialligningen $y' + y/x = 1/x^3$ med initialverdi $y(1) = 0$ og $x > 0$ har løsningen

☑ $y(x) = 1/x - 1/x^2$ ☐ $y(x) = 1 - x$ ☐ $y(x) = e - e^x$

☐ $y(x) = 1/x^3 - 1/x$ ☐ $y(x) = x/(1+x)$

(Fortsettes på side 3.)

Løsning. Integrerende faktor er $F(x) = e^{\ln x} = x$. Multipliserer vi med denne får vi

$$(xy)' = \frac{1}{x^2}$$

og integrasjon gir $xy = -1/x + C$ eller $y(x) = C/x - 1/x^2$. Betingelsen $y(1) = 0$ gir $C = 1$ så alternativ 1 er riktig.

Oppgave 7. Differensialligningen $x^2y' + y = 0$ der $x > 0$, har den generelle løsningen

☐ $y(x) = \sqrt{x^2 + C}$ ☐ $y(x) = Ce^x$ ☑ $y(x) = Ce^{1/x}$

☐ $y(x) = Ce^{x^2}$ ☐ $y(x) = e^{x+C}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Løsning. Siden $x > 0$ kan ligningen skrives $y'/y = -1/x^2$. Integrasjon på begge sider gir da

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + C.$$

Fra dette får vi $y(x) = De^{1/x}$ der D er en konstant ulik 0. I tillegg passer $y(x) = 0$ i den opprinnelige ligningen så alternativ 3 er riktig.

Oppgave 8. Differensialligningen $y'' - 3y' - 4y = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = C\sin(3x) + D\cos(4x)$ ☑ $y(x) = Ce^{-x} + De^{4x}$

☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$ ☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$

☐ $y(x) = Ce^{-3x} + De^{-4x}$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Løsning. Den karakteristiske ligningen er $z^2 - 3z - 4 = 0$ som har løsningene $r_1 = -1$ og $r_2 = 4$. Dermed er den generelle løsningen gitt ved alternativ 2.

Oppgave 9. Differensialligningen $y'' - 6y' + 9y = 0$ med initialverdier $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ har løsningen

☑ $y(x) = 3xe^{3x}$ ☐ $y(x) = 3x$ ☐ $y(x) = e^{-x}\sin(3x)$

☐ $y(x) = e^{3x}(2x - 2)$ ☐ $y(x) = 3xe^{x}$

Løsning. Den karakteristiske ligningen er $z^2 - 6z + 9 = 0$. Denne har den doble roten $r = 3$. Dermed er den generelle løsningen $y(x) = Ce^{3x} + Dxe^{3x}$. Betingelsen $y(0) = 0$ gir $C = 0$. Dermed er $y'(x) = De^{3x} + 3Dxe^{3x}$. Betingelsen $y'(0) = 3$ gir derfor $D = 3$ slik at alternativ 1 er riktig.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. Differensialligningen $(1+x^2)y' = y - 1$ med initialverdi $y(0) = 0$ har løsningen

☐ $y(x) = \sin x$ ☐ $y(x) = x$ ☑ $y(x) = 1 - e^{\arctan x}$

☐ $y(x) = \arctan x$ ☐ $y(x) = \tan x$

Løsning. Ligningen er separabel og kan skrives $y'/(y-1) = 1/(1+x^2)$. Integrasjon på begge sider gir $\ln|y-1| = C + \arctan x$. Dermed er $y - 1 = De^{\arctan x}$ der D er en konstant ulik 0 og $y(x) = 1 + De^{\arctan x}$. Siden $\arctan 0 = 0$ gir betingelsen $y(0) = 0$ at $D = -1$ slik at alternativ 3 er riktig.

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Merk også at oppgavene ikke bygger på hverandre. I oppgavene 4 og 5 er det derfor mulig å løse oppgave (b) selv om du ikke har fått til oppgave (a).

Oppgave 1. Løs differensligningen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n + 1, \quad n \geq 0,$$

med initialverdier $x_0 = 0$ og $x_1 = 0$.

Løsning. Den karakteristiske ligningen til den homogene differensligningen er $r^2 - 4r + 4 = 0$. Denne har en dobbel rot i $r = 2$ og har derfor løsningen $x_n^h = C2^n + Dn2^n$. På grunn av formen på høyresiden prøver vi med en partikulær løsning på formen $x_n^p = A + Bn$. Setter vi inn dette får vi

$$n + 1 = A + B(n+2) - 4\big(A + B(n+1)\big) + 4(A + Bn) = A - 2B + Bn.$$

Skal denne likheten holde for alle n må vi ha $A - 2B = 1$ og $B = 1$ som gir $A = 1 + 2B = 3$. Den generelle løsningen av ligningen er derfor

$$x_n = 3 + n + (C + Dn)2^n.$$

Startverdiene gir så $0 = x_0 = 3 + C$ og $0 = x_1 = 4 + 2(C + D)$. Dette gir $C = -3$ og $D = 1$. Løsningen er derfor

$$x_n = 3 + n + (n-3)2^n.$$

Oppgave 2. Du skal beregne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

og ønsker å bruke trapesformelen. Du bruker $n+1$ punkter $(x_i)_{i=0}^n$ der $x_0 = 0$, $x_n = 1$, og $x_{i+1} - x_i = 1/n$ for $i = 0, \ldots, n-1$. Finn en verdi for

(Fortsettes på side 5.)

n slik at du kan garantere at feilen blir mindre enn 10^{-10} (vi ser bort fra avrundingsfeil).

Du får bruk for følgende: *Dersom vi bruker trapesmetoden for å estimere integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ med $n+1$ punkter $x_0 = a$, $x_n = b$ og $x_{i+1} - x_i = (b-a)/n$ for $i = 0, \ldots, n-1$, så er feilen gitt ved*

$$Rf = \frac{(b-a)^3 f''(c)}{12n^2},$$

for en eller annen $c \in [a, b]$, hvis f'' er kontinuerlig.

Løsning. Vi må finne en verdi for n slik at feilleddet garantert er mindre enn 10^{-10}. I feilleddet inngår $f''(x)$. Fra feilformelen over har vi (med $a = 0$ og $b = 1$)

$$|Rf| = \frac{|f''(c)|}{12n^2} \le \frac{\max_{c\in[0,1]}|f''(c)|}{12n^2}.$$

Utfordringen består derfor i å finne en øvre grense for $|f''(c)|$.
Vi har $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ og derfor

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Her er e^{-x^2} maksimalt lik 1 (når $x = 0$) mens polynomet $4x^2 - 2$ varierer mellom -2 og 2 når x varierer mellom 0 og 1. Begge de to faktorene oppnår altså sin maksverdi for $x = 0$, og dermed har produktet også sin største verdi for $x = 0$,

$$\max_{c\in[0,1]} |f''(c)\| = \|f''(0)\| = 2.$$

Fra dette får vi

$$|Rf| \le \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Hvis høyresiden her er mindre enn 10^{-10} vil også $|Rf|$ være mindre enn 10^{-10}. Vi krever derfor

$$\frac{1}{6n^2} \le 10^{-10}, \quad \text{eller} \quad n \ge \frac{10^5}{\sqrt{6}} \approx 40825.$$

Ikke del av besvarelsen: Det viser seg at dette gir en feil som er omtrent $3.7 \cdot 10^{-11}$. Den minste verdien for n som gjør feilen mindre enn 10^{-10} er $n = 24760$.

Oppgave 3. En funksjon $y(x)$ er definert for alle relle tall x slik at $x \ge 0$. For hver slik x har $y(x)$ egenskapen at arealet mellom x-aksen og grafen til $y(x)$ på intervallet $[0, x]$, addert til funksjonens førstederivert i x, gir som resultat x^3.

a) Forklar hvorfor y må tilfredstille differensialligningen

$$y'' = 3x^2 - y.$$

Løsning. Den tekstlige beskrivelsen gir

$$\int_0^x y(u)\,du + y'(x) = x^3.$$

Deriverer vi denne ligningen får vi den ønskede differensialligningen.

(Fortsettes på side 6.)

b) Vi vet i tillegg at $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$, bruk dette til å finne $y(x)$.

Løsning. Ligningen er $y'' + y = 3x^2$. Vi må først finne den generelle løsningen av den homogene ligningen $y'' + y = 0$. Den karakteristiske ligningen $z^2 + 1 = 0$ har de to løsningene $r_1 = -i$ og $r_2 = i$. Dette gir $y_h(x) = C \sin x + D \cos x$ som generell løsning av den homogene ligningen. I tillegg trenger vi en partikulær løsning og på grunn av formen $3x^2$ på høyresiden prøver vi med $y_p(x) = A + Bx + Cx^2$. Da er $y_p' = B + 2Cx$ og $y_p'' = 2C$. Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$3x^2 = 2C + A + Bx + Cx^2.$$

Skal dette holde for alle x må koeffisientene til de to polynomene stemme overens. Vi får derfor $C = 3$, $B = 0$ og $2C + A = 0$ som gir $A = -6$. Den generelle løsningen er derfor

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \sin x + D \cos x + 3x^2 - 6.$$

Initialverdien $y(0) = 1$ gir $1 = D - 6$ eller $D = 7$. Den andre betingelsen $y'(0) = 0$ gir $0 = C$. Endelig løsning er derfor

$$y(x) = 7 \cos x + 3x^2 - 6.$$

Oppgave 4. Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} i\, 2^i = 2\big(1 + (n-1)2^n\big)$$

for alle naturlige tall n.

Løsning. Vi observerer først at formelen stemmer for $n = 1$ siden begge sider da er lik 2.

Anta nå at formelen stemmer for $n = k$. Dette betyr at

$$\sum_{i=1}^{k} i\, 2^i = 2\big(1 + (k-1)2^k\big);$$

vi må vise at den da også stemmer for $n = k + 1$, altså at

$$\sum_{i=1}^{k+1} i\, 2^i = 2\big(1 + k2^{k+1}\big). \tag{1}$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i\, 2^i &= \sum_{i=1}^{k} i\, 2^i + (k+1)2^{k+1} \\
&= 2\big(1 + (k-1)2^k\big) + (k+1)2^{k+1} \\
&= 2\big(1 + (k-1)2^k + (k+1)2^k\big) \\
&= 2(1 + 2k2^k) \\
&= 2(1 + k2^{k+1}).
\end{aligned}$$

Dette stemmer med (1) så formelen er riktig og induksjonsbeviset fullstendig.

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 5.

a) For å finne en numerisk tilnærming til den deriverte til en funksjon f i punktet a kan vi bruke formelen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{2}$$

Hvis vi bruker denne tilnærmingen og regner med flyttall viser det seg at feilen $E_f(h)$ kan skrives som

$$E_f(h) = C_1 h + \frac{C_2}{h} \tag{3}$$

for passende konstanter C_1 og C_2 som avhenger av f og a, men ikke h. Forklar hvilken feilkilde som gir opphav til det første leddet $C_1 h$ og hvilken feilkilde som gir opphav til det andre leddet C_2/h.

Løsning. Når vi tilnærmer den deriverte med høyre side i (2) gjør vi en matematisk feil som går mot null når h går mot null (tilnærmingen gir bare mening hvis f er deriverbar i a). Siden denne delen av feilen går mot 0 når h går mot null må den svare til det første leddet $C_1 h$.
Siden vi bruker flyttall vil vi også ha avrundingsfeil. Når h blir liten får vi subtraksjon av to nesten like store tall på høyresiden i (2), og vi vet at dette vil gi stor feil når h blir liten. Dette er samme egenskap som leddet C_2/h og dette leddet må derfor svare til avrundingsfeilen.

b) For en bestemt funksjon har vi $C_1 = 1$ og $C_2 = 10^{-16}$ når vi regner med 64 bits flyttall. Hva er da den beste verdien av h vi kan bruke hvis vi ønsker at tilnærmingen i (2) skal gi minst mulig feil?

Løsning. For å få feilen minst mulig deriverer vi $E_f(h)$, setter den deriverte lik 0 og løser for h. Dette gir

$$E_f'(h) = C_1 - \frac{C_2}{h^2} = 0.$$

Denne ligningen har løsningen $h = \sqrt{C_2/C_1} = \sqrt{10^{-16}} = 10^{-8}$.