KAPITTEL 9

Approksimasjon av funksjoner

En grunnleggende teknikk som ofte brukes i ulike deler av matematikk og anvendelser er å tilnærme eller approksimere et objekt med et annet. Som regel er objektet som skal tilnærmes mer komplisert enn objektet som det tilnærmes med. På denne måten får vi et enklere objekt å håndtere på bekostning av at vi må akseptere en, vanligvis liten, feil. I dette kapitlet skal vi se litt på approksimasjon av funksjoner, for det meste med polynomer. Polynomer er populære som approksimasjoner siden verdien av et polynom i et punkt kan bestemmes eksakt (hvis vi ser bort fra avrundingsfeil) ved hjelp av de elementære operasjonene addisjon og multiplikasjon av tall. Dette gjør at polynomer er godt tilpasset beregninger på datamaskin. Mot slutten av kapitlet skal vi også se litt på approksimasjon med stykkevise polynomer. Dette er funksjoner som består av polynombiter som er lenket sammen til mer kompliserte funksjoner. Stykkevise polynomer egner seg også godt til beregninger på datamaskin siden den eneste operasjonen vi trenger i tillegg til polynomoperasjonene er å avgjøre hvilket polynombit vi er på. Dette gjør vi med en test som datamaskiner også håndterer effektivt og greit.

Vi skal først se litt raskt på Taylor polynomer og noen aspekter ved dem som ikke vanligvis dekkes i tradisjonelle matematikkbøker. Deretter skal vi så vidt ta for oss en annen tilnærmingsmetode, nemlig interpolasjon. Et viktig poeng i dette kapitlet er at det er viktig hvordan vi skriver polynomene våre, og vi skal se at det kan være spesielt hendig å skrive polynomer ved hjelp av de såkalte Bernstein-polynomene. Dette leder oss over i såkalte Bezier-kurver som er mye brukt i grafikk. Mot slutten skal vi se mer på stykkevise polynomer som egner seg svært godt til å spalte opp en funksjon i komponenter med forskjellig oppløsning eller skala, såkalt *flerskalaoppløsning*. Som vi skal se egner dette seg godt for representasjon og kompresjon av lyd.

9.1 Taylor polynomer

Taylor[1]-polynomer er polynomer som tilnærmer en gitt funksjon godt i nærheten av et punkt $x = a$. Vi oppnår dette ved å kreve at Taylor-polynomet skal reprodusere så mange som mulig av funksjonens deriverte i a.

9.1.1 Konstruksjon av Taylor-polynomer

Funksjonen vi skal tilnærmere kaller vi f, og vi antar at f kan deriveres så mange ganger vi ønsker; en kort og vanlig måte å beskrive denne antagelsen på er å si at f skal være glatt. For å kunne bestemme Taylor-polynomer trenger vi et tall a i definisjonsområdet til f. Det enkleste Taylor-polynomet er av grad 0, det er altså konstant, og framkommer ved at vi konstruerer det enklest mulige polynomet som reproduserer verdien til f i a. Hvis vi betegner dette polynomet med p_0 så har vi altså

$$p_0(x) = f(a).$$

Dette er en svært god tilnærming til f i $x = a$, men for de fleste funksjoner blir kvaliteten fort dårlig når vi fjerner oss fra dette punktet.

Neste steg er å forsøke å finne en enkel tilnærming til f som tar med seg både verdien til f og dens førstederiverte f' i a. Siden vi har to betingelser, er det rimelig å tro at vi trenger et polynom med to frie koeffisienter for å få til dette. Vi prøver derfor med et førstegradspolynom $p_1(x) = b_0 + b_1x$. De to betingelsene gir oss to ligninger i de to ukjente b_0 og b_1,

$$\begin{aligned} f(a) &= p_1(a) = b_0 + b_1a, \\ f'(a) &= p_1'(a) = b_1. \end{aligned}$$

Dette gir $b_1 = f'(a)$ og $b_0 = f(a) - af'(a)$ så p_1 kan skrives som

$$p_1(x) = b_0 + b_1x = f(a) - af'(a) + xf'(a) = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Siden p_1 er en rett linje som har samme verdi og derivert som f i a er p_1 tangenten til f i dette punktet.

La oss også ta bryderiet med å konstruere $p_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2$, et andregradspolynom som tilnærmer f best mulig i a. Siden vi har tre frie koeffisienter er det rimelig å tvinge p_2 til å ha samme verdi, førstederivert og andrederivert som f i a. Dette gir betingelsene

$$f(a) = p_2(a) = b_0 + b_1a + b_2a^2, \tag{9.1}$$

$$f'(a) = p_2'(a) = b_1 + 2b_2a, \tag{9.2}$$

$$f''(a) = p_2''(a) = 2b_2. \tag{9.3}$$

Vi legger merke til at dette ligningssystemet har en spesiell struktur som gjør det lett å løse. Fra (9.3) kan vi finne b_2, setter vi resultatet inn i (9.2) kan vi finne b_1

[1] Etter Brooke Taylor (1685–1731), engelsk matematiker.

og setter vi begge disse resultatene inn i (9.1) kan vi finne b_0. Løsningen vi finner er

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{f''(a)}{2}, \\ b_1 &= f'(a) - af''(a), \\ b_0 &= f(a) - af'(a) + \frac{a^2 f''(a)}{2}. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i uttrykket for p_2 og forenkler så får vi

$$p_2(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a). \tag{9.4}$$

Fra dette er det ikke så vanskelig å gjette den generelle formen på Taylor-polynomet av grad n. Men før vi skriver opp dette, la oss reflektere litt over utledningene våre. Hvis vi ser på andregradstilfellet så begynte vi med å skrive opp det generelle polynomet av grad 2

$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2. \tag{9.5}$$

Vi skrev deretter opp betingelsene våre som ga oss et ligningssystem som var lett å løse. Etter noen forenklinger kom vi så fram til (9.4). Legg merke til at om vi til å begynne med hadde antatt at p_2 var på formen

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \tag{9.6}$$

så ville ligningssystemet vårt blitt

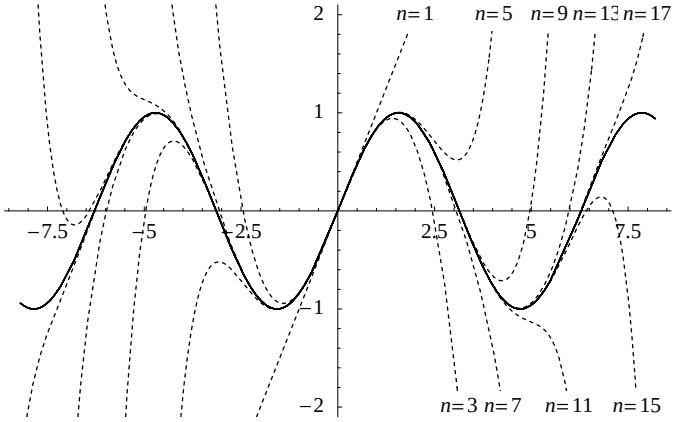
$$f(a) = p(a) = c_0, \quad f'(a) = p'(a) = c_1, \quad f''(a) = p''(a) = 2c_2$$

som har løsningen $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$ og $c_2 = f''(a)/2$. Dette gir oss kjapt og greit (9.4) uten behov for noen forenklinger.

Dette illustrerer et viktig poeng: Et polynom kan skrives på mange ekvivalente måter, og ved å velge en form tilpasset problemet vi skal løse kan vi ofte forenkle beregingene våre. Et annet aspekt av dette er at ulike polynomformer kan være mer eller mindre følsomme for avrundingsfeil. Dessverre er det slik at (9.5), som er den vanligste måten å skrive polynomer på, kan være svært følsom for avrundingsfeil om ikke x ligger nær 0, særlig når graden er høy. Vi skal se nærmere på dette i seksjon 9.3 under.

Når vi nå har funnet en måte å skrive polynomer på som er godt tilpasset problemet vi skal løse, så er det på tide å angripe det generelle tilfellet. Vi ønsker å danne et Taylor-polynom p_n av grad n som er en best mulig tilnærming til f i punktet $x = a$ og skriver

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots c_n(x-a)^n.$$



Figur 9.1. Funksjonen $\sin x$ og dens 9 første Taylor-polynomer.

Siden p_n har $n+1$ frie koeffisienter så forventer vi å kunne legge $n+1$ betingelser på f, nemlig betingelsene $f(a) = p(a)$, $f'(a) = p'_n(a)$, $\ldots$, $f^{(n)}(a) = p^n_n(n)(a)$. Setter vi inn uttrykket for p_n får vi ligningssystemet

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = c_1, \quad f''(a) = 2\,c_2, \quad f'''(a) = 6\,c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n!\,c_n$$

som har løsningen

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{6}, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Taylor-polynomet av grad n er dermed

$$p_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

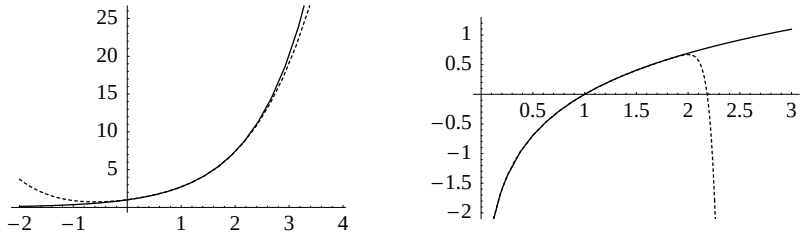
og for å understreke avhengigheten av f skriver vi ofte $p_n(x) = T_n f(x)$ eventuelt $p_n(x) = T_n f(x;a)$ hvis vi også trenger å ta med avhengigheten av a.

9.1.2 Feilleddet

Det er viktig å huske på at Taylor-polynomet $T_n f(x)$ er en tilnærming til f, og skal vi bruke denne tilnærmingen er det som regel viktig å ha en formening om hvor stor feilen er. Dette kan vi lese ut fra restleddet $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ som kan skrives på formen

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)$$

der c er et tall i intervallet (a, x) (intervallet (x, a) hvis $x < a$).



(a) (b)

Figur 9.2. Funksjonen e^x og dens Taylor-polynom av grad 4 (a) og funksjonen $\log x$ og dens Taylor-polynom av grad 20.

Vi legger merke til at når x nærmer seg a så vil feilen $R_n f(x)$ gå mot null. Dette er ikke så overaskende siden vi vet at feilen er 0 i $x = a$. Det er også interessant å se hva som skjer når n går mot uendelig og x holdes fast. Uttrykket $1/(n+1)!$ vil ganske raskt bli svært lite mens $(x-a)^{n+1}$ vil gå mot null, en eller uendelig, avhengig av om $|x-a|$ er mindre enn en, lik en eller større enn en. Den siste faktoren $f^{(n+1)}(c)$ kan essensielt oppføre seg på to måter. De peneste funksjonene er de som er slik at alle de deriverte kan begrenses av en konstant som er uavhengig av derivasjonsordenen. For eksempel vet vi at tallverdien til alle de deriverte til både $\sin x$ og $\cos x$ kan begrenses av konstanten 1. Siden uttrykket $(x-a)^{n+1}/(n+1)!$ går mot null når n går mot uendelig, uansett hva x og a er, så ser vi at for slike funksjoner vil verdien av Taylor-polynomet i x konvergere pent mot $f(x)$. De ikke så pene funksjonene er de som har deriverte som ikke kan begrenses av en konstant uavhengig av derivasjonsordenen. Slike funksjoner skal vi ikke beskjeftige oss med her.

Figurene 9.1 og 9.2 viser noen kjente funksjoner med noen tilhørende Taylor-polynomer. I figur 9.1 ser vi hvordan Taylor-polynomene får med seg flere og flere av svingningene til $\sin x$ når graden øker. Det viser seg at når n går mot uendelig så vil Taylor-polynomene konvergere mot $\sin x$ for alle verdier av x. Det samme gjelder for eksponensialfunksjonen e^x som er vist i figur 9.2 (a). For logaritmefunksjonen $\log x$ er situasjonen imidlertid annerledes. Som vi ser i figur 9.2 (b) så tilnærmes $\log x$ godt av sitt Taylor-polynom av grad 20 på intervallet $(0, 2]$, men når x blir større enn 2 bli avviket fort stort. Det viser seg at dette gjelder uansett hvor høy grad Taylor-polynomet har. Studiet av når følger av polynomer som disse konvergerer mot en fast funksjon er en viktig del av matematikken som du vil møte i senere matematikkurs.

9.1.3 Beregning av verdier på polynomer

Til slutt i denne delen skal vi ta for oss noe som ikke har spesielt med Taylor-polynomer å gjøre, men som vi trenger om vi skal bruke Taylor-polynomer på

en datamaskin. Vi skal utlede en effektiv algoritme for å beregne verdien i x av polynomet

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x. \tag{9.7}$$

Legg merke til at om vi har en slik algoritme kan vi også beregne verdier på polynomer på formen $q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$. For hvis vi setter $u = x - a$ kan vi skrive q som $c_0 + c_1 u + \cdots + c_n u^n$, altså formen i (9.7), men med u som variabel.

Den opplagte måten å beregne $p(x)$ på er å regne ut de forskjellige produktene på formen $x \cdot x \cdots x$, multiplisere med koeffisientene og addere sammen. En enklere måte er lettest å vise ved et eksempel. Anta at $n = 3$; da kan vi skrive p som

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = c_0 + x\big(c_1 + x(c_2 + x c_3)\big).$$

Dette kan vi gjøre for generell grad,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = c_0 + x\Big(c_1 + x\big(c_2 + \cdots + x(c_{n-1} + x c_n)\cdots\big)\Big).$$

For å regne ut dette begynner vi innerst og arbeider oss utover og bruker $(r_i)_{i=0}^n$ for å ta vare på delresultatene. Vi setter først $r_n = c_n$ og regner deretter ut

$$r_i = c_i + x\, r_{i+1}, \qquad \text{for } i = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 0.$$

Etter dette har vi multiplisert ut alle parentesene slik at r_0 vil ha verdien $p(x)$. Siden vi ikke trenger å ta vare på verdien av alle r_i'ene kan vi klare oss med en r. Dette gir oss følgende algoritme.

Algoritme 9.1 (Nestet multiplikasjon). *La polynomet $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots c_n x^n$ være gitt ved at koeffisientene er lagret i arrayen* `c` *og x i variabelen* `x`. *Etter beregningene*

```
r = c[n];
for (i=n-1; i>=0; i--)
   {
      r = c[i] + x*r;
   }
```

vil variabelen `r` *inneholde verdien $p(x)$.*

9.2 Interpolasjon og andre approksimasjonsmetoder

Når vi nå er kjent med Taylor-polynomer er det naturlig å se seg om etter andre metoder for å tilnærme funksjoner. Før vi tar for oss interpolasjon kan det være på sin plass med noen overordnede betraktninger omkring approksimasjon av funksjoner.

La oss aller først minne om at matematiske metoder og teknikker generelt kan brukes på minst to måter. Taylor-polynomer er et eksempel på en teknikk som ofte brukes for å få dypere innsikt i en funksjon, og ofte trenger vi bare papir og blyant for å gjøre beregningene. Det er derfor viktig å øve seg i bruk av Taylor-polynomer ved å regne oppgaver (med papir og blyant). Taylor-polynomer er også et nyttig verktøy for å utlede andre metoder som Newtons metode for å finne nullpunkter og Eulers metode for å løse differensialligninger. Taylor-polynomer brukes sjeldnere på datamaskin som en praktisk approksimasjonsmetode fordi vi som regel trenger en approksimasjon som ikke bare gir liten feil i nærheten av et punkt, men over et intervall.

De andre approksimasjonsmetodene vi skal se på her er for det meste praktiske metoder som brukes på datamaskiner for å tilpasse måledata med glatte kurver. Dette betyr at det ikke er så viktig å kunne bruke metodene på papiret. Derimot er det viktig å vite om det er noen begrensninger på når metoden kan brukes, hvor komplisert er algoritmen som implementerer metoden, hvilke egenskaper vil tilnærmingen ha, hvor nøyaktig er tilnærmingen, hvor følsom er metoden for avrundingsfeil også videre. Dette betyr at det er viktigere med en god forståelse av metodene mer enn fingerferdighet med å bruke dem på mindre problemer med papir og blyant (selv om det også kan være nyttig i blant). En slik grundig forståelse får du neppe av å lese det som står her, men forhåpentligvis får du en liten smakebit på hvordan metodene framkommer og hva de kan brukes til.

Når vi skal velge oss en approksimasjonsmetode er det to hovedvalg vi må gjøre. Det første er å bestemme oss for hvilken form approksimasjonen skal ha. Skal den være et polynom, en trigonometrisk funksjon, en rasjonal funksjon, en eksponensialfunksjon eller noe annet? Det fins gode metoder basert på alle disse funksjonsklassene, men det vanligste er å bruke approksimasjonsmetoder basert på polynomer eller trigonometriske funksjoner. Og av disse to klassene er nok polynomer det vanligste. Dette har sammenheng med det vi før har vært inne på, at polynomer egner seg særdeles godt til beregninger på datamaskin.

Det andre valget dreier seg om hvilken metode vi velger for å bestemme approksimasjonen når klassen av funksjoner vi skal bruke er valgt. Vi skal se litt nærmere på dette når vi først har tatt for oss et alternativ til Taylor-polynomer.

9.2.1 Interpolasjon med polynomer

Når vi tilnærmer en funksjon f med Taylor-polynomer må vi kunne beregne deriverte av f. Det er mange situasjoner der dette ikke er mulig, den vanligste er kanskje når f bare er kjent ved måleverdier, slik som når vi måler temperaturen ved ulike tidspunkter eller når vi sampler et lydsignal. I kapittel 6 så vi litt på hvordan den deriverte kan tilnærmes ut fra kjente funksjonsverdier, men det er som regel vel så bra å beregne approksimasjonen direkte fra funksjonsverdiene uten å gå veien om deriverte.

Naturlig nok er tilnærmingene våre polynomer når vi bruker polynominterpo-

lasjon, og tilnærmingen bestemmes ved at vi krever at feilen skal være null i noen isolerte punkter. Et velkjent eksempel er sekanten til en funksjon f. Da velger vi to forskjellige punkter x_0 og x_1 og lar tilnærmingen p_1 være den rette linja (det polynomet av grad 1) som har samme verdi som f i disse punktene. Med andre ord så krever vi at

$$f(x_0) = p_1(x_0), \quad f(x_1) = p_1(x_1).$$

Hvis vi skriver p_1 på standardformen $p_1(x) = b_0 + b_1 x$ får vi et ligningssystem som består av to ligninger med de to ukjente b_0 og b_1 som har løsningen

$$b_0 = \frac{f(x_0)x_1 - f(x_1)x_0}{x_1 - x_0}, \quad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Siden vi har antatt at $x_0 \neq x_1$ gir disse formlene alltid mening. Dette betyr at p_1 er gitt ved

$$p_1(x) = \frac{f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}x. \tag{9.8}$$

Dette polynomet kan også skrives som

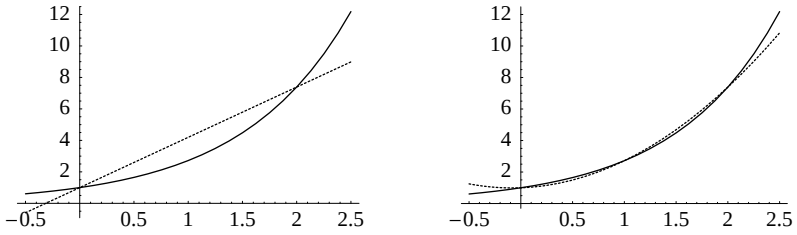
$$p_1(x) = f(x_0)\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{9.9}$$

At dette er riktig ser vi ved at høyresiden er et førstegradspolynom som har verdien $f(x_0)$ når $x = x_0$ og verdien $f(x_1)$ når $x = x_1$. Dette illustrerer igjen fenomenet med at et polynom kan skrives på flere måter. Formen (9.9) er spesielt hendig siden vi der kan bruke de to funksjonsverdiene $f(x_0)$ og $f(x_1)$ som koeffisienter. Dette kommer av at polynomet $\ell_0(x) = (x_1 - x)/(x_1 - x_0)$ tilfredstiller betingelsene $\ell_0(x_0) = 1$ og $\ell_0(x_1) = 0$ mens $\ell_1(x) = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$ tilfredstiller betingelsene $\ell_1(x_0) = 0$ og $\ell_1(x_1) = 1$. Dette skriver vi ofte som $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$ for $i, j = 0, 1$ der symbolet $\delta_{i,j}$ er definert som

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i = j; \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

La oss nå forsøke å øke graden. Siden et andregradspolynom har tre frie koeffisienter er det rimelig å håpe på at vi kan tvinge et slikt polynom gjennom tre gitte punkter x_0, x_1 og x_2 med tilhørende funksjonsverdier $f(x_0)$, $f(x_1)$ og $f(x_2)$. Hvis vi skriver polynomet som $p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ så vil de tre interpolasjonsbetingelsene gi tre ligninger for de tre ukjente b_0, b_1 og b_2. Dette ligningssystemet har ingen spesiell struktur som vi kan utnytte for å forenkle løsningsprosedyren. La oss derfor se om det lar seg gjøre å generalisere den spesielle formen for sekanten som vi fant i (9.9).

Trikset består i finne andregradspolynomer som er 0 i alle punkter unntatt ett, der de har verdien 1. Det er lett å finne et polynom som er 0 i x_1 og x_2. Polynomet $q(x) = c(x - x_1)(x - x_2)$ har åpenbart denne egenskapen uansett hva



(a) (b)

Figur 9.3. Funksjonen e^x og med sekanten som interpolerer i $x = 0$ og $x = 2$ i (a), og parabelen som interpolerer i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$ i (b) .

konstanten c er. Det vil vanligvis ikke ha verdien 1 i x_0, men det kan vi fort ordne ved å velge c på riktig måte. Betingelsen

$$q(x_0) = c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1$$

gir $c = 1/\big((x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\big)$. Vi ser derfor at polynomet

$$\ell_{0,2}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

tar verdien 1 i x_0 og verdien 0 i x_1 og x_2. Denne konstruksjonen kan vi gjenta med de andre punktene. Dette gir oss de to polynomene $\ell_{1,2}$ og $\ell_{2,2}$,

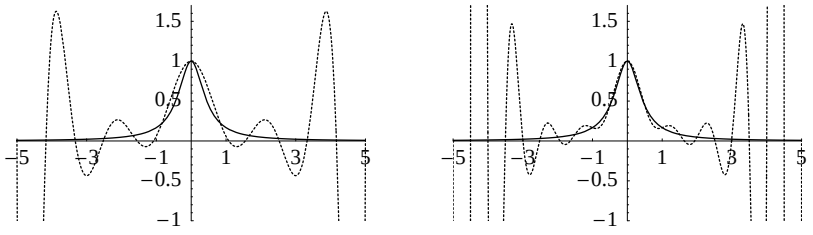
$$\ell_{1,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$
$$\ell_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Vi ser at $\ell_{1,2}$ har verdien 1 i x_1 og 0 i x_0 og x_2, mens $\ell_{2,2}$ har verdien 1 i x_2 og verdien 0 i x_0 og x_1. Men dette betyr at polynomet

$$p_2(x) = f(x_0)\ell_{0,0}(x) + f(x_1)\ell_{1,2}(x) + f(x_2)\ell_{2,2}(x)$$

er av grad 2 og har samme verdi som f i punktene x_0, x_1 og x_2 siden hvert av de tre leddene bare er ulik 0 i ett punkt, og i dette punktet har de riktig funksjonsverdi. Når vi adderer de tre leddene sammen "ødelegger de derfor ikke for hverandre".

Figur 9.3 viser eksempler på interpolasjon av eksponensialfunksjonen med en rett linje og med en parabel (polynomene er stiplet). Vi ser at parabelen er en så god tilnærming at det er vanskelig å skille den fra funksjonen den tilnærmer. Hvis vi øker graden og interpolerer e^x i flere uniformt spredte punkter kan vi få feilen så liten vi måtte ønske.



(a) (b)

Figur 9.4. Funksjonen $1/(1+5x^2)$ med polynomet av grad 11 som interpolerer 12 uniformt spredte punkter i intervallet $[-5,5]$ (a) og interpolanten av grad 19 som interpolerer 20 uniformt spredte punkter i det samme intervallet (b) (polynomene er stiplet).

Konstruksjonen av interpolerende polynomer kan generaliseres til vilkårlig grad.

Setning 9.2. *La funksjonen f være gitt sammen med de $n+1$ punktene x_0, x_1, $\ldots$, x_n, og definer de $n+1$ polynomene $\{\ell_{i,n}\}_{i=0}^n$ ved*

$$\ell_{i,n}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}.$$

Da er polynomet $p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_{i,n}(x)$ det eneste polynomet av grad n som tilfredstiller interpolasjonsbetingelsene $p_n(x_j) = f(x_j)$ for $j = 0, 1, \ldots, n$.

Som i det kvadratiske tilfellet er det ikke så vanskelig å sjekke at $\ell_{i,n}$ er 1 i x_i og 0 i alle de andre gitte punktene. Ved å multiplisere med $f(x_i)$ får vi derfor et polynom som har verdien $f(x_i)$ i x_i og verdien 0 i alle de andre punktene. Når vi så adderer opp alle leddene får vi polynomet av grad d som tilfredstiller interpolasjonsbetingelsene.

Det som gjenstår er å vise at det bare fins ett polynom som tilfredstiller interpolasjonsbetingelsene. Vi skal anta at det fins et polynom r som også har denne egenskapen og vise at da må r være lik p. La oss se på differansen $e = p - r$ mellom de to polynomene. Siden både p og r har verdien $f(x_i)$ i x_i for $i = 0$, $\ldots$, n ser vi at e er 0 i alle de $n+1$ punktene. Dette polynomet av grad n har altså $n+1$ nullpunkter. Men fra algebraens fundamentalteorem vet vi at dette er umulig for et polynom av grad n så da er eneste mulighet at e er identisk null (alle koeffisientene er null). Men hvis $e = p - r = 0$ må vi ha $r = p$. Altså har vi bare ett polynom som tilfredstiller interpolasjonsbetingelsene.

Figur 9.4 viser polynomer av forholdsvis høy grad (11 og 19) som interpolerer funksjonen $1/(1+5x^2)$. Noe overaskende så ser vi at feilen er forholdsvis stor, særlig nær endene av intervallet, og den blir større ettersom graden øker (plottene

er klippet i y-retningen). I midten av intervallet er imidlertid tilnærmingen bra og ser ut til å bedres med økende grad. Forøvrig er kanskje det mest iøynefallende de voldsomme svingningene i de interpolerende polynomene. Selv når feilen er liten vil et interpolerende polynom vanligvis svinge rundt funksjonen det interpolerer, det ligger i interpolasjonens natur. Du vil se det samme om du plasserer en bøyelig linjal på et bord og forsøker å tvinge den til å gå gjennom noen faste punkter.

Selv om figur 9.4 kan virke litt deprimerende med tanke på om interpolasjon er en god approksimasjonsmetode så fins det en del positive resultater. Resultatene forutsetter at funksjonen f som vi interpolerer er glatt (en funksjon som kan deriveres mange ganger uten problemer). Dersom vi lar interpolasjonspunktene bevege seg mot hverandre og bli konsentrert i et stadig mindre intervall vil feilen på dette intervallet gå mot null når intervallbredden går mot null. I grensen, når alle punktene blir like, vil det interpolerende polynomet falle sammen med Taylor-polynomet av samme grad. Det går også an å vise at for en glatt funksjon definert på et intervall $[a, b]$ så går det for hvert heltall $n \geq 0$ an å finne en samling av $n + 1$ interpolasjonspunkter slik at hvis vi interpolerer i disse punktene med et polynom av grad n vil feilen gå mot null når graden n går mot uendelig.

9.2.2 Andre metoder

De to approksimasjonsmetodene vi har sett på så langt er begge basert på å konstruere polynomer som reproduserer informasjon om f i diskrete punkter. Taylor-polynomer reproduserer verdien og de første deriverte til f i ett punkt, mens vi ved interpolasjon reproduserer funksjonsverdiene til f i flere punkter. Det er imidlertid andre måter å finne tilnærminger på.

En vanlig metode er å finne det polynomet som gjør at feilen i approksimasjonen blir minst mulig. Dette kan høres greit ut, men innebærer noen uventede utfordringer. Spørsmålet er nemlig hvordan vi kan måle feilen når vi tilnærmer f med et polynom p. Feilfunksjonen $e = f - p$ er jo en funksjon, og det er dermed ikke uten videre så lett å se hva det vil si å gjøre denne feilen minst mulig. Nøkkelen ligger i hvordan vi kan måle størrelsen på en funksjon.

La oss anta at funksjonen f vi skal tilnærme er definert på et interval $[a, b]$. Et mål for størrelsen til feilen har vi ved uttrykket

$$\max_{x\in[a,b]} \big|f(x) - p(x)\big|. \tag{9.10}$$

Dette svarer til at vi benytter verdien av feilfunksjonen i det punktet der den er størst som et mål på feilen. Det å minimere feilen betyr da å finne et polynom p slik at dette maksimale avviket blir minst mulig. Hvis vi bruker polynomer av grad n og for enkelhets skyld skriver dem på formen $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots c_nx^n$ så ser vi at feilen i (9.10) kan skrives som

$$\epsilon_1(c_0, \ldots, c_n) = \max_{x\in[a,b]} \big|f(x) - (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n)\big|.$$

Å finne polynomet av grad n som gjør feilen minst mulig innebærer derfor å minimere funksjonen ϵ_1 med hensyn på variablene c_0, c_1, ..., c_n.

En annen måte å måle feilen på er ved integralet

$$\int_a^b \big|f(x) - p(x)\big|\, dx,$$

altså arealet av forskjellen mellom de to funksjonene. I dette tilfellet blir funksjonen vi skal minimere

$$\epsilon_2(c_0, \ldots, c_n) = \int_a^b \big|f(x) - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)\big|\, dx.$$

Igjen kan vi bestemme en tilnærming til f ved å gjøre dette uttrykket minst mulig. Vi ser da at det er viktig å ha med tallverditegnet, for hvis ikke kan vi få feilen til å bli veldig liten ved å velge p slik at arealet mellom funksjonene er stort, men med negativt fortegn, noe som ikke svarer til at p er nær f.

Ulempen med disse to metodene er at det for begge er forholdsvis vanskelig å bestemme polynomene som gjør feilen minst mulig. Fra teorien for funksjoner av flere variable vet vi at vi kan finne ekstremalpunktene til en deriverbar funksjon ved å løse ligningene vi får ved å sette gradienten (de partielle deriverte) til null. Dessverre inneholder uttrykkene for ϵ_1 og ϵ_2 tallverdifunksjonen som ikke er deriverbar overalt ($|x|$ har en knekk i $x = 0$). Det er fremdeles mulig å bestemme minimumspunktene til ϵ_1 og ϵ_2, men den eneste muligheten er å gjøre det ved iterative algoritmer som først gjetter på en løsning og så stadig forsøker å forbedre denne i håp om at prosessen vil konvergere mot polynomet som gjør feilen minst mulig.

Et tredje feilmål er populært fordi en med det kan finne polynomet som gjør feilen minst mulig uten å gjøre slike iterasjoner. Vi måler da feilen ved

$$\int_a^b \big(f(x) - p(x)\big)^2\, dx.$$

Siden vi kvadrerer feilfunksjonen vil uttrykket under integraltegnet aldri bli negativt så vi slipper unna tallverditegnet. Setter vi inn for p får vi

$$\epsilon_3(c_0, \ldots, c_n) = \int_a^b \big(f(x) - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)\big)^2\, dx.$$

Dette uttrykket kan vi derivere med hensyn på hver av de $n + 1$ koeffisientene c_0, ..., c_n. Setter vi disse deriverte lik null får vi et lineært ligningssystem med $n+1$ lineære ligninger i de $n+1$ ukjente koeffisientene c_0, c_1, ..., c_n. Det er ikke så vanskelig å vise at dette ligningssystemet har nøyaktig en løsning og at denne løsningen gir det eneste minimumspunktet til ϵ_3.

9.3 Valg av basis er viktig, Bernstein-basisen

Så langt i dette kapitlet har vi sett flere eksempler på at det kan være fordelaktig å ikke alltid skrive et polynom av grad n på standardformen $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$. Ved å bruke andre former så vi at det ble mye enklere å finne både Taylor-polynomer og interpolerende polynomer. Ikke overaskende har de ulike måtene å skrive polynomer på ulik følsomhet for avrundingsfeil også. I denne seksjonen skal vi presentere en spesielt gunstig måte å skrive polynomer på, ikke minst med tanke på å gjøre avrundingsfeilen liten.

Men hvorfor trenger vi å velge oss en måte å skrive polynomer på, kan vi ikke bruke den formen som til en hver tid er mest hendig? Hvis vi arbeider med papir og blyant er det selvsagt riktig, da er det ingen som legger noen begrensninger på hvordan vi representerer polynomer. Arbeider vi på en datamaskin derimot blir det fort tungvint å bruke flere forskjellige polynomformer. Skal vi lagre et polynom er det mest naturlig å lagre koeffisientene i forhold til en eller annen polynomform. Hvis vi da skal bruke ulike polynomformer må vi si fra hvilken polynomform som er brukt hver gang vi lagrer et polynom og vi må ha programvare for å oversette mellom de forskjellige formene. En ting er at det tar tid å skrive slik programvare, en annen at hver gang vi gjør en slik konvertering gjør vi en avrundingsfeil som dermed ødelegger noe av nøyaktigheten i vår representasjon. Det er derfor flere fordeler med å velge seg en fast representasjon når vi skal lage et programsystem.

9.3.1 Et problematisk polynom

Aller først trenger vil litt terminologi omkring ulike skrivemåter for polynomer. Når vi skriver polynomer på formen $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ så er polynomet dannet ved *lineære kombinasjoner* av polynomene 1, x, $\ldots$, x^n. Disse enkle polynomene som vi bruker som byggeklosser kalles *basis-polynomer* og samlingen av alle disse basis-polynomene kalles *potens-basisen*. Som vi har sett fins det andre måter å skrive polynomer på, og dette svarer til å bruke andre basiser. Skriver vi polynomer som $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ bruker vi den skiftede potensbasisen 1, $x-a$, $\ldots$, $(x-a)^n$, mens basisen $\{\ell_{i,n}\}_{i=0}^n$ som vi brukte i forbindelse med interpolasjon kalles *Lagrange-basisen*[2].

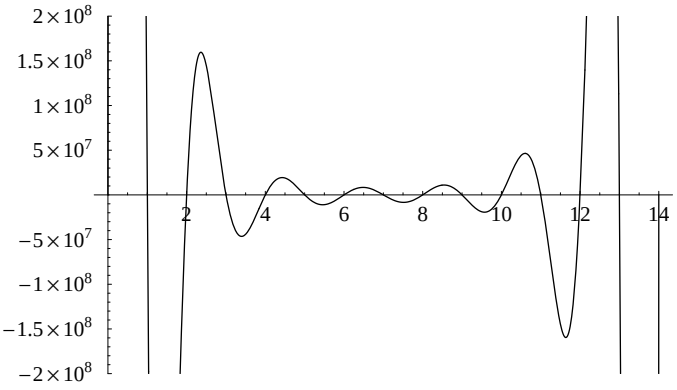
Med tanke på avrundingsfeil er potensbasisen spesielt problematisk, særlig når vi beveger oss langt bort fra $x = 0$. Som et eksempel skal vi se på polynomet

$$w(x) = \prod_{i=0}^{14} (x - i)$$

som ofte kalles Wilkinson-polynomet[3], se figur 9.5. Hvis vi multipliserer ut parentesene og skriver polynomet på potensform finner vi at polynomet også kan

[2]Etter den franske matematikeren Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

[3]Etter James Wilkinson (1919–1986), engelsk matematiker. Wilkinson var innvolvert i arbeidet med den første engelske datamaskinen ACE og var en av pionerene innen analyse av avrundingsfeil.



Figur 9.5. Wilkinson-polynomet $w(x)$ (noe klipping i y-retningen).

skrives

$$\begin{aligned} w(x) = {} & 87178291200\,x - 283465647360\,x^2 + 392156797824\,x^3 - 310989260400\,x^4 \\ & + 159721605680\,x^5 - 56663366760\,x^6 + 14409322928\,x^7 \\ & - 2681453775\,x^8 + 368411615\,x^9 - 37312275\,x^{10} + 2749747\,x^{11} \\ & - 143325\,x^{12} + 5005\,x^{13} - 105\,x^{14} + x^{15}. \end{aligned}$$

Hvis vi representerer koeffisientene som 64-bits flyttall forteller Mathematica oss at $w(13) = 264$. Dette er selvsagt helt feil siden vi har konstruert polynomet slik at det er 0 i alle heltallene mellom 0 og 14. Spørsmålet er hva som er årsaken til problemet. Er det bare rutinene i Mathematica for å beregne verdien av et polynom på potensform som er dårlige, er det potensformen som skaper problemene eller er polynomet i seg selv så problematisk at vi ikke kan forvente et mer nøyaktig svar? Polynomet er helt klart problematisk i seg selv, men det viser seg at potensformen forsterker problemet. For å vise dette skal vi representere polynomet i en annen basis og se at om vi da regner ut $w(13)$ så får vi et bedre resultat.

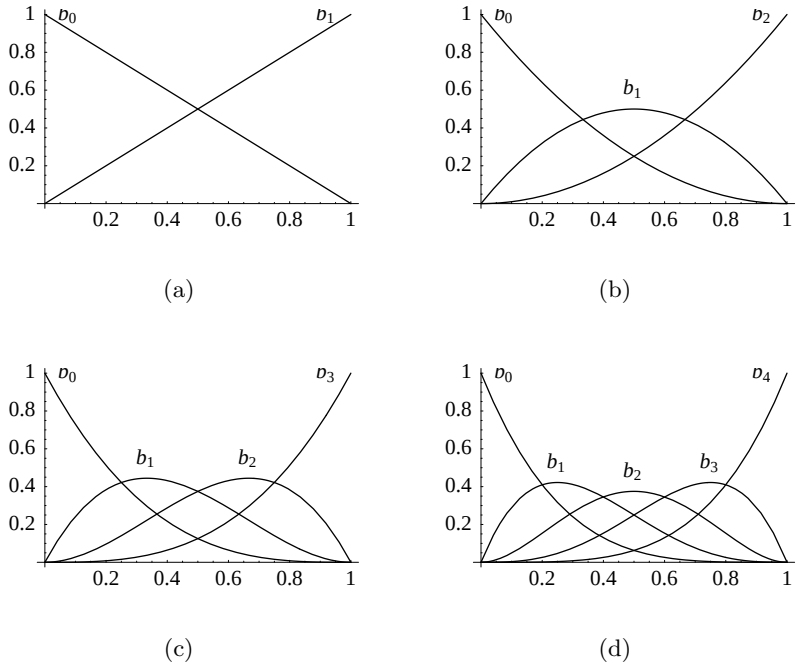
Vår nye basis er spesielt tilpasset et intervall $[a, b]$ og kalles *Bernstein-basisen*[4]. Den er gitt ved

$$b_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)^i \Big(\frac{b-x}{b-a}\Big)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Hvis vi setter $[a, b] = [0, 1]$ forenkler høyresiden seg og basisen blir

$$b_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

[4]Sergi Natanovich Bernstein (1880–1968) var født i Ukraina, men arbeidet i Russland (Sovjetunionen)



Figur 9.6. Polynomene i Bernsteinbasisen av grad 1 (a), 2 (b), 3 (c) og 4 (d).

De ulike polynomene i Bernstein-basisen av grad 1–4 på intervallet $[0, 1]$ er vist i figur 9.6. Når det er klart fra sammenhengen hvilken grad vi bruker vil vi ofte utelate den andre indeksen n i $b_{i,n}$.

Bernstein-basisen på et generelt intervall $[a, b]$ framkommer ved å flytte venstre ende til a og så strekke eller krympe funksjonene til høyre ende faller i b. Plott av basisen for et vilkårlig intervall ser derfor akkurat ut som plottene i figur 9.6 bortsett fra at tallene på x-aksen vil være annerledes.

Wilkinson-polynomet $w(x)$ kan også skrives som $w(x) = \sum_{i=0}^{15} c_i b_{i,15}(x)$ for passende koeffisienter (c_i). Gjør vi det og representerer koeffisientene som 64-bits flyttall kan vi regne ut $w(13)$ i denne representasjonen. Resultatet vi da får er $w(13) = -0.0000244541$. Selv om dette også er galt er det langt fra så galt som svaret vi fikk med potensbasisen. Det viser seg at Bernstein-basisen generelt oppfører seg bedre numerisk enn potensbasisen. Bernstein-basisen har også mange andre gode egenskaper som gjør at den ofte brukes ved representasjon av polynomer på datamaskiner. Ikke minst er Bernstein-basisen utgangspunktet for de såkalte Bezier-kurvene.

9.3.2 Noen egenskaper ved Bernstein-basisen

Når polynombasisen er bestemt er all informasjon om et polynom gitt ved koeffisientene. Det burde derfor være mulig å lese polynomets oppførsel ut fra koeffisientene. For de fleste polynombasiser er dette ikke så enkelt, men den viktigste egenskapen til Bernstein-basisen er at koeffisientene modellerer polynomet på en intuitiv og naturlig måte. Før vi ser hva dette innebærer må vi ta for oss noen viktige egenskaper ved Bernstein-basisen. Disse egenskapene er stort sett ganske enkle å utlede, så vi overlater bevisene til oppgaver.

Lemma 9.3. *Bernstein-basisen har blant annet følgende egenskaper:*

1. *Alle polynomene i Bernstein-basisen er alltid større enn eller lik null på intervallet* $[a, b]$,
$$b_{i,n}(x) \geq 0 \qquad \text{for alle } x \in [a, b].$$

2. *Polynomene i Bernsteinbasisen summerer seg opp til 1,*
$$\sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(x) = 1, \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

3. *Basispolynomet* $b_{i,n}(x)$ *har sitt maksimum på intervallet* $[a, b]$ *i punktet* $x_i^* = a + i(b - a)/n$.

4. *I* $x = a$ *er* $b_{0,n}(a) = 1$ *mens alle de andre basispolynomene er 0. I* $x = b$ *er* $b_{n,n}(b) = 1$ *mens alle de andre basispolynomene er 0.*

5. *Den deriverte av* $b_{i,n}$ *er gitt ved*
$$b'_{i,n}(x) = \begin{cases} -n\, b_{0,n-1}(x), & \text{når } i = 0; \\ n\left(b_{i-1,n-1}(x) - b_{i,n-1}(x)\right), & \text{når } 1 \leq i \leq n-1; \\ n\, b_{n-1,n-1}(x), & \text{når } i = n. \end{cases}$$

6. *Med* $u = (x - a)/(b - a)$ *så er* $1 - u = (b - x)/(b - a)$ *slik at*
$$b_{i,n}(x) = \binom{n}{i}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-i} = \binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i}.$$

Egenskap 6 er svært nyttig ved programmering av polynomer på Bernsteinform i og med at polynomer på et generelt intervall kan omskrives til polynomer på intervallet $[0, 1]$. Ved hjelp av denne transformasjonen kan vi også oversette egenskaper som gjelder på intervallet $[0, 1]$ til det mer generelle intervallet $[a, b]$.

9.3.3 Egenskaper ved polynomer på Bernstein-form

Fra egenskapene over kan vi nå utlede egenskaper for polynomer uttrykt i Bernstein-basisen. For enkelhets skyld gjør vi dette i det kubiske tilfellet ($n = 3$).

For å forenkle terminologien skal vi heretter kalle et polynom som er skrevet i Bernstein-basisen et *Bernstein-polynom*. La

$$p(x) = c_0 b_0(x) + c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x) + c_3 b_3(x)$$

være et kubisk Bernstein-polynom på intervallet $[a, b] = [0, 1]$. Hvis x ligger i intervallet $[a, b]$ så vet vi fra egenskapene 1 og 2 at de fire basispolynomene er større enn eller lik null og summerer seg til 1. Dette betyr at $p(x)$ er et veiet gjennomsnitt av de fire koeffisientene $c_0, \ldots, c_3$. Siden et gjennomsnitt av en samling med tall alltid må være større enn det minste tallet og mindre enn det største tallet, gjelder det samme her — tallet $p(x)$ må ligge mellom $\min_i c_i$ og $\max_i c_i$ (hvis alle fire c'ene er like vil $p(x)$ være lik denne felles verdien).

Hvis vi tar en titt på figur 9.6 (c) så ser vi at når vi beveger oss fra $x = 0$ til $x = 1$ så varierer størrelsen på basispolynomene. Spesielt så har alle basispolynomene et entydig maksimum i $[a, b]$, og fra egenskap 3 over vet vi at b_i har sitt maksimum i $x = i/3$. Dette betyr at koeffisienten c_i bidrar mest til $p(x)$ i $x = i/3$. Hvis vi skal tegne ut koffisienten c_i bør vi derfor tegne den med x-koordinat $i/3$, mens y-koordinaten er c_i. Punktet i planet gitt ved $(i/3, c_i)$ kalles det i'te *kontrollpunktet* til p slik at p til sammen har de fire kontrollpunktene $\{(i/3, c_i)\}_{i=0}^{3}$. Hvis vi forbinder kontrollpunktene med rette linjer får vi *kontrollpolygonet* til p.

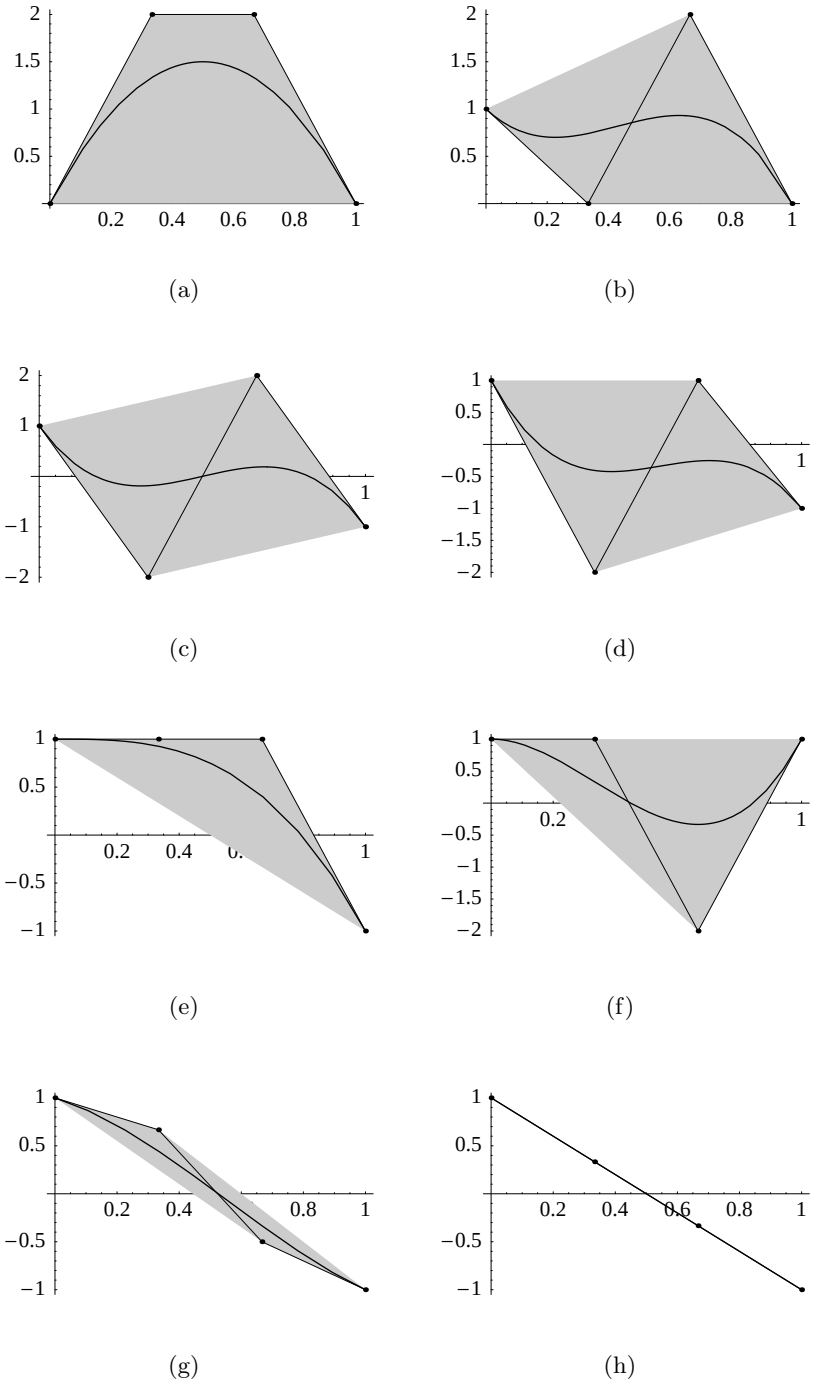
Dette er motivasjonen bak den generelle definisjonen av kontrollpunkter og kontrollpolygon.

Definisjon 9.4. *La Bernstein-polynomet $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i b_{i,n}(x)$, definert på intervallet $[a, b]$, være gitt. De $n+1$ punktene i planet gitt ved $c_i^p = \big(a+i(b-a)/n, c_i\big)$ for $i = 0, 1, \ldots, n$, kalles kontrollpunktene til p mens den brudne linja som framkommer ved å forbinde kontrollpunktene med rette linjer kalles kontrollpolygonet til p.*

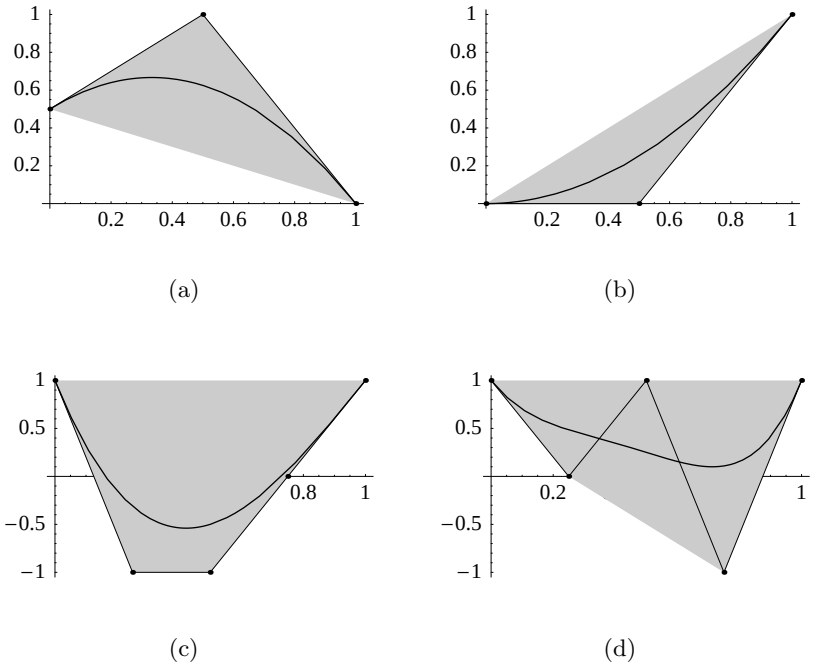
Tolv eksempler på kubiske Bernstein-polynomer med tilhørende kontrollpunkter og kontrollpolygon er vist i figur 9.7 og 9.8. I alle tilfellene ser vi hvordan Bernstein-polynomet er en utglattet versjon av sitt kontrollpolygon. Det samlede visuelle inntrykket av sammenhengen mellom funksjon og kontrollpolygon har flere ingredienser.

Lemma 9.5. *Et Bernstein-polynom $p(x)$ definert på intervallet $[a, b]$ har blant annet følgende egenskaper:*

1. *Verdien av polynomet i $x = a$ faller sammen med det første kontrollpunktet, og verdien av polynomet i $x = b$ faller sammen med det siste kontrollpunktet.*



Figur 9.7. Åtte eksempler på kubiske Bernstein-polynomer med tilhørende kontrollpolygoner. Koeffisientene er $(0, 2, 2, 0)$ i (a), $(1, 0, 2, 0)$i (b), $(1, -2, 2, -1)$ i (c), $(1, -2, 1, -1)$ i (d), $(1, 1, 1, -1)$ i (e), $(1, 1, -2, 1)$ i (f), $(1, 2/3, -1/2, -1)$ i (g) og $(1, 1/3, -1/3, -1)$ i (h).



Figur 9.8. Eksempler på kvadratiske Bernstein-polynomer med tilhørende kontrollpolygoner ((a) og (b)) og Bernstein-polynomer av grad 4 ((c) og (d)).

2. *Tangenten til polynomet i $x = a$ har samme retning som linja fra det første til det andre kontrollpunktet og tangenten i $x = b$ har samme retning som linja fra det nest siste til det siste kontrollpunktet.*

3. *Verdien av polynomet ligger alltid mellom verdien til minste og største koeffisient.*

Disse egenskapene følger direkte fra egenskaper ved basispolynomene $b_{i,n}$. For eksempel så følger egenskap 1 fra egenskap 4 i lemma 9.3 og egenskap 3 fra egenskap 1 og 2 i lemma 9.3, se oppgavene. Egenskap 2 følger fra egenskap 5 i lemma 9.3, men dette krever litt regning så vi tar med denne utledningen her.

Bevis for egenskap 2. La oss igjen holde oss til kubiske Bernstein-polynomer på intervallet $[0, 1]$. Den deriverte ser vi da er gitt ved

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{i=0}^{3} c_i b'_{i,3}(x) \\ &= 3\Big(-c_0 b_{0,2}(x) + c_1\big(b_{0,2}(x) - b_{1,2}(x)\big) + c_2\big(b_{1,2}(x) - b_{2,2}(x)\big) + c_3 b_{2,2}(x)\Big) \\ &= 3(c_1 - c_0)b_{0,2}(x) + 3(c_2 - c_1)b_{1,2}(x) + 3(c_3 - c_2)b_{2,2}(x). \end{aligned}$$

Med andre ord ser vi at den deriverte er et kvadratisk Bernstein-polynom med koeffisienter som er gitt ved differansen mellom to nabokoeffisienter til det opprinnelige polynomet, multiplisert med 3. Spesielt så får vi at

$$p'(0) = 3(c_1 - c_0), \qquad p'(1) = 3(c_3 - c_2),$$

siden $b_{0,2}(x) = 1$ mens $b_{1,2}(0) = b_{2,2}(0) = 0$, og tilsvarende så er $b_{2,2}(1) = 1$ mens $b_{0,2}(1) = b_{1,2}(1) = 0$. Siden vi også har $p(0) = c_0$ fra egenskap 1 så vet vi dermed at tangenten til p i $x = 0$ har ligningen $h(x) = c_0 + 3(c_1 - c_0)x$. Vi har dessuten $h(1/3) = c_1$ så tangenten går gjennom de to første kontrollpunktene til p og faller dermed sammen med det første segmentet av kontrollpolygonet. ∎

Vi har skissert enda en egenskap ved Bernstein-polynomer i figurene: vi ser at Bernstein-polynomet i hvert tilfelle holder seg innenfor det grå området definert av kontrollpunktene. Før vi kan formulere dette mer presist må vi vite hvordan dette området framkommer. Det grå området $\mathbb{G}$ er gitt ved den *konvekse innhylningen* til kontrollpunktene. Det at området er *konvekst* betyr at om to punkter ligger i $\mathbb{G}$ så vil også alle punktene på linjesegmentet som forbinder punktene ligge i $\mathbb{G}$. Nå går det an å vise at den konvekse innhylningen til en samling punkter er den minste konvekse mengden som inneholder alle punktene i samlingen. Det grå området i figurene er dermed den minste mengden i planet som inneholder alle kontrollpunktene til det aktuelle Bernstein-polynomet. Med denne bakgrunnen kan vi formulere den siste egenskapen.

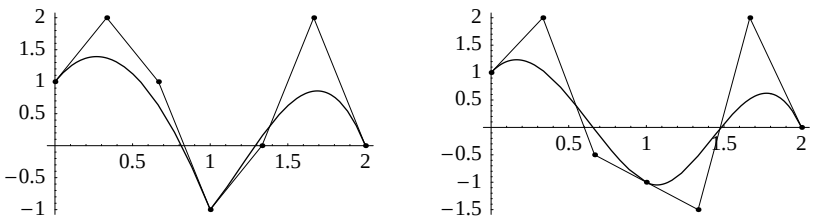
Lemma 9.6. *La $p = \sum_{i=0}^{n} c_i b_{i,n}(x)$ være et Bernstein-polynom. For enhver x i intervallet $[a, b]$ så ligger punktet $\big(x, p(x)\big)$ i den konvekse innhylningen til kontrollpunktene til p.*

Beviset for dette vil det føre for langt å ta med her, men det hele bunner i at den konvekse innhylningen av en samling punkter kan tolkes som samlingen av alle veide gjennomsnitt av punkter i samlingen. Vi ser derved sammenhengen med Bernstein-polynomer som jo er et veiet gjennomsnitt av sine koeffisienter.

Bernstein-polynomer har en mengde andre elegante egenskaper som vi ikke kan gå innpå her, men kjernen i de aller fleste av disse egenskapene er den nære sammenhengen mellom polynomet selv og dets kontrollpolygon. Det typiske er at en egenskap ved et Bernstein-polynom som regel kan karakteriseres ved en tilsvarende egenskap ved polynomets kontrollpolygon. Dette er særlig hendig ved beregninger siden vi i stedenfor å gjøre beregninger direkte med polynomet da kan gjøre tilsvarende beregninger med kontrollpolygonet. Fordelen med dette er at kontrollpolygonet matematisk sett er enkelt siden det bare består av n rette linjesegmenter.

9.3.4 Sammenlenking av Bernstein-polynomer

De mange fine egenskapene ved Bernstein-basisen gjør at den ofte er å foretrekke når vi skal arbeide med polynomer på en datamaskin. Men hvor anvendelige er



(a) (b)

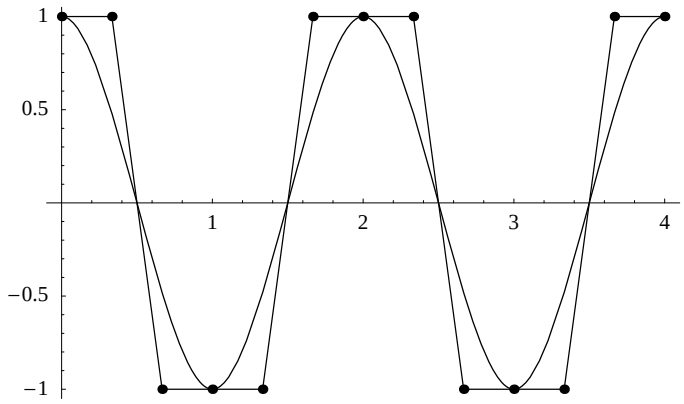
Figur 9.9. Sammenlenking av to kubiske Bernstein-polynomer i $x = 1$. I (a) er resultatet kontinuerlig i skjøten, men den deriverte er diskontinuerlig, mens i (b) er både funksjonsverdi og derivert kontinuerlige i skjøten.

egentlige polynomer som approksimasjonsredskap? For å lage en tilnærming som skal være nøyaktig i nærheten av ett punkt fungerer Taylor-polynomer svært godt, men hva om vi skal tilnærme en komplisert funksjon over et langt intervall? Vi så jo faktisk i seksjon 9.2.1 at det ikke nødvendigvis er så lurt å interpolere i mange punkter med et polynom av høy grad. Og selv om polynomer av lav grad egner seg godt for datamaskinberegninger, øker både kompleksiteten og avrundingsfeilen raskt når graden øker, selv om vi bruker Bernstein-basisen.

For å kunne approksimere kompliserte funksjoner trenger vi mange frie parametre som kan justeres slik at tilnærmingen blir god. For polynomer er de frie parametrene koeffisientene, og polynomer med mange koeffisienter må derfor nødvendigvis ha høy grad, noe som altså ikke er så attraktivt fra et beregningsteknisk synspunkt. Heldigvis fins det en annen mulighet. Det er ikke bare ved å øke graden vi kan få tilgang på mange koeffisienter, vi kan også få det til med lav grad om vi bruker mange polynomer. Med en slik framgangsmåte kan vi dele opp det totale definisjonsintervallet til funksjonen vi skal approksimere i mindre delintervaller og så bruke et polynom på hvert delinterval. Det eneste vi må passe på er at vi hekter polynombitene pent sammen i skjøtene.

Figur 9.9 viser to eksempler på funksjoner som begge er sammensatt av to Bernstein-polynomer. I begge tilfellene er polynomene lenket sammen i $x = 1$. Siden Bernstein-polynomer interpolerer første og siste koeffisient er det lett å sikre at to sammenlenkede polynomer er kontinuerlige i skjøten. Dette vil være tilfelle om den siste koeffisienten i polynomet til venstre er lik den første koeffisienten i polynomet til høyre, slik som i figur 9.9.

Når det sammenlenkede polynomet bare er kontinuerlig i en skjøt vil det som regel ha en iøynefallende knekk, slik som i figuren. For å få en glattere overgang trenger vi at også den deriverte er kontinuerlig i skjøten. Vi vet at tangenten i det venstre endepunktet til et Bernstein-polynom faller sammen med det første linjesegmentet i kontrollpolygonet mens tangenten i det høyre endepunktet fall-



Figur 9.10. En funksjon med kontinuerlig derivert satt sammen av 4 Bernstein-polynomer.

er sammen med kontrollpolygonets siste linjesegment. Fra dette ser vi at både funksjonsverdi og derivert blir kontinuerlig i skjøten om det siste linjesegmentet i det første kontrollpolyognet ligger på samme rette linje som det første linjesegmentet i det andre kontrollpolyognet, slik som i figur 9.9 (b).

La oss oppsummere dette i en setning.

Setning 9.7. *La $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i b_i(x)$ være et Bernstein-polynom av grad n på intervallet $[a, b]$, la $q(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i b_i(x)$ være et Bernstein-polynom av samme grad på intervallet $[b, c]$ og la f betegne den sammensatt funksjonen gitt ved*

$$f(x) = \begin{cases} p(x), & \text{for } x \in [a, b); \\ q(x), & \text{for } x \in [b, c]. \end{cases}$$

Da er f kontinuerlig i $x = b$ hvis og bare hvis $c_n = d_0$, mens f er kontinuerlig med kontiuerlig derivert i $x = b$ hvis og bare hvis $c_n = d_0$ og de tre kontrollpunktene $(b - h_1, c_{n-1})$, (b, c_n) og $(b + h_2, d_1)$ ligger på en rett linje. Her er $h_1 = (b - a)/n$ og $h_2 = (c - b)/n$.

Ved å lenke sammen Bernstein-polynomer får vi en svært fleksibel klasse av funksjoner med gode approksimasjonsegenskaper. Et enkelt eksempel er vist i figur 9.10. For å beregne tilnærmingene kan vi bruke interpolasjon eller minimering av et passende feilmål, akkurat som for polynomer.

I en del sammenhenger kan det være ønskelig at både den andrederiverte og enda høyere deriverte skal være kontinuerlige over skjøtene mellom polynombitene. Dette kan vi få til ved å legge passende betingelser på koeffisientene, slik som i setning 9.7, men etterhvert blir disse betingelsene kompliserte å holde styr på. Det viser seg at det er mulig å konstruere enkle basisfunksjoner bestående av ulike polynomsegmenter som har denne kontinuiteten innebygd. Ved å multiplisere disse basisfunksjonene med koffisienter og så addere sammen kan vi danne

generelle stykkevise polynomer. Bygger vi stykkevise polynomer på denne måten kalles de ofte *splinefunksjoner*[5].

9.3.5 Beregning av verdier på Bernstein-polynomer

Vi har så langt ikke nevnt noen metode for å beregne verdien av et Bernstein-polynom. En mulighet er selvsagt å beregne verdien av hvert basispolynom, multiplisere med koeffisientene og så summere. Det fins flere andre (og bedre) metoder. Den mest brukte er basert på å beregne en sekvens av veide gjennomsnitt mellom to og to tall og er svært motstandsdyktig overfor avrundingsfeil. En enklere metode er å omskrive Bernstein-polynomet til en slags potensform, noe som i det kubiske tilfellet kan gjøres ved

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0(1-x)^3 + 3c_1x(1-x)^2 + 3c_2x^2(1-x) + c_3x^3 \\ &= (1-x)^3\left(c_0 + 3c_1\frac{x}{1-x} + 3c_2\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^2 + c_3\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^3\right) \\ &= (1-x)^3(c_0 + 3c_1v + 3c_2v^2 + v^3, \end{aligned}$$

der vi har satt $v = x/(1-x)$ og antar at $x \neq 1$. I stedenfor å sette $(1-x)^3$ utenfor som faktor kan vi sette x^3 utenfor og få et polynom på potensform i $w = (1-x)/x$,

$$p(x) = x^3(c_0w^3 + 3c_1w^2 + 3c_2w + c_3).$$

Potensbasisen gir større avrundingsfeil jo lenger bort fra $x = 0$ vi kommer. Fra et beregningssynspunkt er det derfor best å bruke det første alternativet når $x \in [0, 1/2]$ og det andre når $x \in [1/2, 1]$. Ordner vi oss på denne måten vil vi alltid ha $v \leq 1$ eller $w \leq 1$, og på intervallet $[0, 1]$ oppfører potensbasisen seg rimelig pent med tanke på avrundingsfeil.

For generell grad får vi at $p(x)$ kan skrives på de to ekvivalente måtene

$$\begin{aligned} p(x) &= (1-x)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i v^i \\ &= x^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_{n-i} w^i \end{aligned} \tag{9.11}$$

der $v = x/(1-x)$ og $w = (1-x)/x$ som før (den første formelen gjelder ikke når $x = 1$ og den siste ikke når $x = 0$). På denne måten har vi dermed redusert det å beregne en funksjonsverdi for et Bernstein-polynom til det å beregne en verdi for et polynom skrevet på potensform.

Hvis vi arbeider på et generelt intervall $[a, b]$ husker vi fra egenskap 6 i lemma 9.3 at det er lurt å sette $u = (x-a)/(b-a)$. Da er også $1-u = (b-x)/(b-a)$

[5]Ordet spline brukes på engelsk om en bøyelig linjal som kan tvinges til å gå gjennom noen faste punkter.

slik at

$$b_{i,n}(x) = \binom{n}{i}\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)^i\Big(\frac{b-x}{b-a}\Big)^{n-i} = \binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i}.$$

Dermed kan vi beregne verdier på Bernstein-polynomer på et vilkårlig intervall $[a, b]$ dersom vi kan gjøre slike beregninger på intervallet $[0, 1]$.

Vi er nå nesten klar til å gi en algoritme for å beregne $p(x)$, det eneste som mangler er beregning av binomialkoeffisientene. Ved å sette inn definisjonen av $\binom{n}{i-1}$ er det ikke så vanskelig å se at relasjonen

$$\binom{n}{i} = \frac{n-i+1}{i}\binom{n}{i-1}$$

holder for $i = 1, \ldots, n$. Når vi dessuten vet at $\binom{n}{0} = 1$ gir dette oss en grei algoritme for å beregne binomialkoeffisientene. Dermed har vi alle ingrediensene for å beregne verdien av et Bernstein-polynom.

Algoritme 9.8. *La Bernstein-polynomet $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i b_{i,n}(x)$ på intervallet $[a, b]$ være gitt. Etter at koden under er utført vil variabelen r inneholde verdien $p(x)$.*

```
binom = 1; d[0] = c[0];
for (i=1; i<n+1; i++)
   {
      binom = binom*(n-i+1)/i;
      d[i] = c[i]*binom;
   }

u = (x-a)/(b-a);

if (u < 0.5)
   {
       v = u/(1-u);
       r = d[n];
       for (i=n-1; i>=0; i--)
           {
              r = d[i] + v*r;
           }
       r = Math.pow(1-u,n)*r;
   }
else
   {
       w = (1-u)/u;
       r = d[0];
       for (i=1; i<=n; i++)
```

```
            {
                r = d[i] + w*r;
            }
        r = Math.pow(u,n)*r;
    }
```

I den første delen av algoritmen multipliserer vi koeffisientene med binomialkoeffisienter og lagrer resultatet i en ny array `d`. Matematisk svarer dette til å utføre $d_i = \binom{n}{i} c_i$ for $i = 0, \ldots, n$. Legg merke til at dette kan gjøres på samme måte uansett hvilken av de to formlene i (9.11) vi bruker siden en linje i Pascals trekant er symmetrisk om midten (mer presist så har vi $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$).

Med tilordningen $u = (b - x)/(b - a)$ transformerer vi oss fra intervallet $[a, b]$ til intervallet $[0, 1]$. Den nye variabelen er dermed u, og avhengig av hvilken halvdel av $[0, 1]$ denne ligger i velger vi den varianten i (9.11) som gjør at den endelige variabelen (v eller w) ligger i intervallet $[0, 1]$. Hvis $u < 0.5$ setter vi derfor $v = u/(1-u)$ og beregner $p(x)$ som $p(x) = (1-u)^n \sum_{i=0}^{n} d_i u^i$, hvis $u \geq 0.5$ bruker vi $p(x) = u^n \sum_{i=0}^{n} d_{n-i} w^n$.

9.4 Parametriske kurver

En grunnleggende egenskap ved funksjonsbegrepet er at til hver verdi av argumentet så svarer det nøyaktig en funksjonsverdi. Geometrisk betyr dette at en vertikal linje ikke kan skjære grafen til funksjonen mer enn en gang. Ved hjelp av parametriske kurver kan vi representere mer generelle, en-dimensjonale, geometriske former.

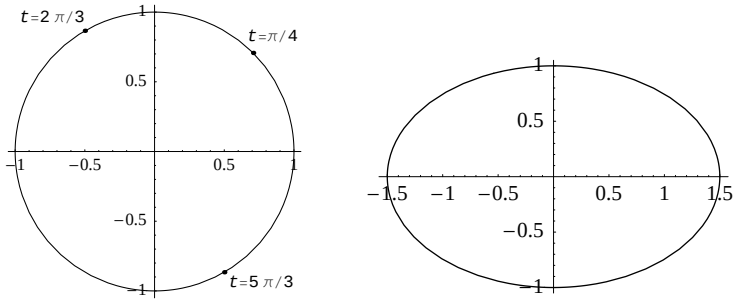
9.4.1 Definisjon av parametriske kurver

Fra skolematematikken vet vi at ligningen for en sirkel med radius 1 er gitt ved $x^2 + y^2 = 1$. Hvis vi løser denne med hensyn på y er vi vant til å skrive $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Dette siste uttrykket gir ikke y som én funksjon av x, men som to funksjoner av x, en verdi på den øvre halvsirkelen og en på den nedre. Det er altså umulig å representere hele sirkelen ved hjelp av en funksjon.

Ved hjelp av *parametriske representasjoner* kommer vi unna denne begrensningen. En parametrisk representasjon av sirkelen er gitt ved uttrykket

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Vi ser at som funksjoner av en variabel så trenger $\boldsymbol{r}$ et argument som er et reelt tall, men forskjellen er at $\boldsymbol{r}$ for hver slik t i definisjonsområdet $[0, 2\pi]$ produserer *to* reelle tall. Disse kan vi tenke på som et punkt i planet (eller ekvivalent, som en vektor i planet), og vi angir dette ved å skrive $\boldsymbol{r} : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$.



(a) (b)

Figur 9.11. De to parametriske kurvene $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ (i (a)) og $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, \sin t)$ (i (b).

Legg merke til at om vi setter $x = \cos t$ og $y = \sin t$ så kommer vi tilbake til den vanlige sirkelligningen via en velkjent identitet for trigonometriske funksjoner,

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Et plott av $\boldsymbol{r}$ er vist i figur 9.11 (a) med verdien av t angitt for noen typiske punkter, og figur 9.11 (b) viser den relaterte parametriske representasjonen $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, \sin t)$. Hvis vi nå setter $x = 2\cos t$ og $y = \sin t$ så ser vi at

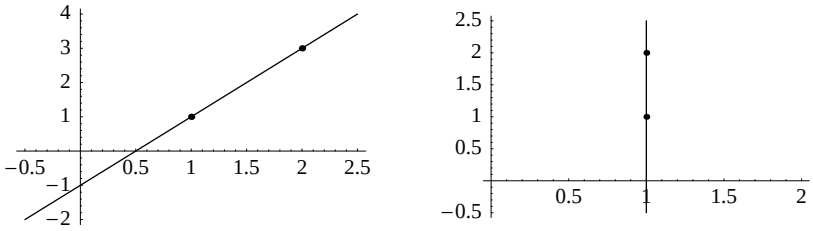
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \cos^2 t + \sin t = 1$$

som vi kjenner igjen som en typisk ellipseligning.

Noen flere eksempler på parametriske representasjoner er gitt i figur 9.12. Legg spesielt merke til at den parametriske representasjonen $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ gir den rette linja gjennom de to punktene i planet gitt ved $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. Med funksjoner har vi problemer med å representere vertikale linjer, men på parametrisk form skiller slike linjer seg ikke ut. Hvis $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ har samme x-koordinat får vi en vertikal linje uten problemer, se (b). I (c) ser vi at funksjoner kan representeres som parametriske kurver. I (d) har vi rotert kurven i (c) slik at den havner langs y-aksen i steden, noe som selvsagt er umulig med funksjoner. Funksjonene i (e)–(h) har det til felles at de alle er på formen $\boldsymbol{r}(t) = h(t)(\cos t, \sin t)$ for ulike valg av funksjonen h. Siden $(\cos t, \sin t)$ gir enhetssirkelen så ser vi at alle kurvene oppstår ved å trykke sammen eller trekke ut sirkelen på ulike måter.

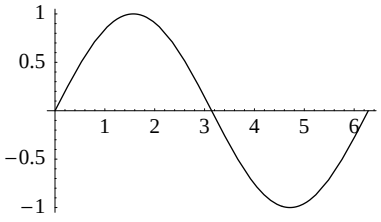
Ut fra disse innledende eksemplene kan vi sette opp en generell definisjon av parametriske representasjoner.

Definisjon 9.9. *En plan, parametrisk representasjon eller parametrisk kurve definert på intervallet $[a, b]$, er et uttrykk på formen $\boldsymbol{r}(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ der f og g er to funksjoner definert på intervallet $[a, b]$.*

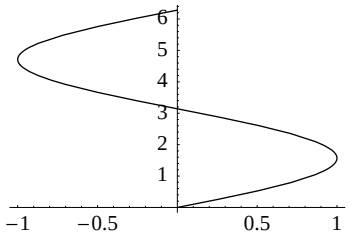


(a)

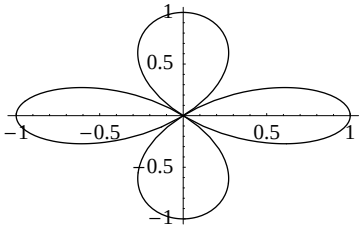
(b)



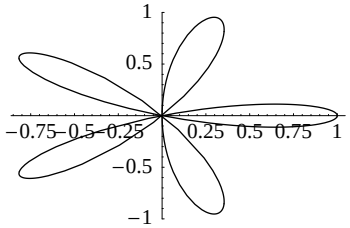
(c)



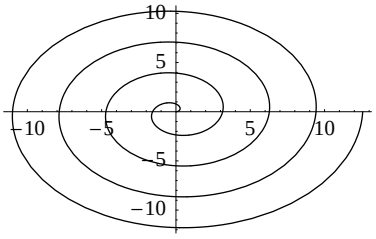
(d)



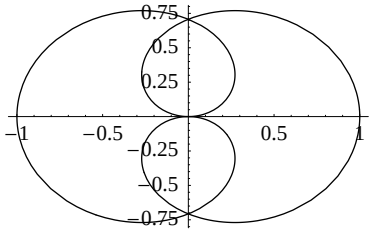
(e)



(f)



(g)



(h)

Figur 9.12. Åtte parametriske kurver: (a) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ med $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ og $\boldsymbol{b} = (2, 3)$; (b) som (a), men med $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ og $\boldsymbol{b} = (1, 2)$; (c) $\boldsymbol{r}(t) = (t, \sin t)$; (d) $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t, t)$, (e) $\boldsymbol{r}(t) = \cos(2t)(\cos t, \sin t)$; (f) $\boldsymbol{r}(t) = \cos(5t)(\cos t, \sin t)$; (g) $\boldsymbol{r}(t) = t(\cos t, \sin t)/2$, (h) $\boldsymbol{r}(t) = \sin(t/2)(\cos t, \sin t)$.

En viktig observasjon er at ulike parametriske representasjoner kan gi opphav til samme geometriske bilde. For eksempel kan vi også få fram sirkelen ved representasjonen $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, men nå holder det om t varierer i intervallet $[0, 1]$. En litt mer overaskende sirkelrepresentasjon er gitt ved

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

men merk at denne bare gir halve sirkelen.

Generelt er det alltid mange parametriske representasjoner som gir det samme, geometriske bildet, og i mer formelle framstillinger er en parametrisk kurve definert som samlingen av alle parametriske representasjoner som gir opphav til det samme geometriske bildet. Vi skal ikke være så formelle og vil bruke begrepene om hverandre.

Vi skal holde oss til parametriske kurver i planet, men de kan enkelt generaliseres til høyere dimensjoner ved å legge til flere komponenter. For eksempel representerer den parametriske representasjonen $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ en spiral i rommet som hever seg over xy-planet. Dette ser vi siden de to første koordinatene gir en sirkel i xy-planet, mens z-komponenten vokser med t slik at vi beveger oss oppover i rommet når t øker. Ved å legge på flere komponenter får vi parametriske representasjoner som kan representere kurver med så mange romdimensjoner som vi måtte trenge.

Parametriske kurver har en fysisk tolkning som ofte kan være nyttig. Representasjonen $\boldsymbol{r}$ definert på intervallet $[a, b]$ gir et geometrisk bilde som vi kan tenke på som en måte å kjøre bil fra $\boldsymbol{r}(a)$ til $\boldsymbol{r}(b)$ langs veien definert av $\boldsymbol{r}$. Uttrykket $\boldsymbol{r}(t)$ gir dermed posisjonen langs veien ved tidspunkt t. Ulike parametriske representasjoner svarer da til ulike kjøremønstre langs veien. Vi kan for eksempel kjøre fort eller bruke lang tid, vi kan til og med kjøre et stykke, rygge litt og så kjøre framover igjen, eller vi kan kjøre med konstant fart.

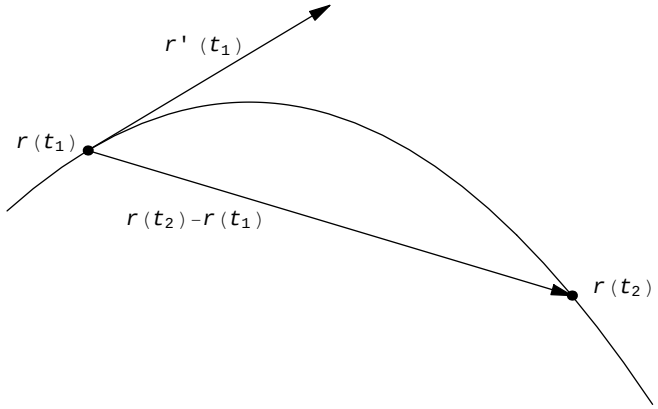
9.4.2 Tangent, hastighet og derivert

Ved de to tidspunktene t_1 og t_2 har vi de to posisjonene $\boldsymbol{r}(t_1)$ og $\boldsymbol{r}(t_2)$ på kurven vår. Differansen $\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)$ gir dermed vektoren fra $\boldsymbol{r}(t_1)$ til $\boldsymbol{r}(t_2)$, altså sekanten mellom de to punktene, og lar vi t_2 nærme seg t_1 vil sekanten nærme seg tangenten til kurven i $\boldsymbol{r}(t)$. Det viser seg at det er lurt å skalere lengden med forskjellen i tid $t_2 - t_1$. Gjør vi dette får vi

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \left(\lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}, \lim_{t_2 \to t_1} \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}\right) = \big(f'(t_1), g'(t_1)\big), \tag{9.12}$$

Dette er utgangspunktet for vår neste setning og er illustrert i figur 9.13.

Setning 9.10. *Anta at f og g er deriverbare funksjoner. Den deriverte av den parametriske kurven $\boldsymbol{r}(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ er definert som $\boldsymbol{r}'(t) = \big(f'(t), g'(t)\big)$.*



Figur 9.13. Grenseovergang fra sekant til tangent.

Retningen til den deriverte faller sammen med tangentlinja til kurven i $\boldsymbol{r}(t)$ mens lengden av tangenten gir farten til bevegelsen ved dette tidspunktet.

Bevis. Utsagnet om retningen til den deriverte følger fra kommentarene foran og relasjonene i (9.12), mens utsagnet om farten trenger litt forklaring. Fra (9.12) har vi

$$\left|\boldsymbol{r}'(t_1)\right| = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\left|\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)\right|}{t_2 - t_1}, \tag{9.13}$$

der notasjonen $|\boldsymbol{a}|$ generelt angir lengden til vektoren $\boldsymbol{a}$. Uttrykket $\left|\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)\right|$ er avstanden mellom de to punktene $\boldsymbol{r}(t_1)$ og $\boldsymbol{r}(t_2)$, målt i "luftlinje". Når t_2 nærmer seg t_1 vil avstanden etterhvert nærme seg avstanden langs veien gitt ved kurven. Dividerer vi med tiden $t_2 - t_1$ som det tar å bevege seg fra $\boldsymbol{r}(t_1)$ til $\boldsymbol{r}(t_2)$ får vi gjennomsnittsfarten over dette tidsintervallet. Når så lengden av tidsintervallet går mot 0 som i (9.13) får vi farten ved tidspunktet t_1 som lengden av tangenten. ∎

Det er vanlig å referere til tangenten $\boldsymbol{r}'(t)$ som *hastigheten* til bevegelsen gitt ved parametriseringen $\boldsymbol{r}(t)$ mens lengden av tangenten er farten, det vi måler på speedometeret på en bil. Hastigheten gir altså mer informasjon enn farten og viser også hvilken retning vi beveger oss i. Informasjonen vi nå har om tangentretninger er vesentlig når vi skal hekte sammen kurvebiter til større kurver i seksjon 9.5.

9.4.3 Anvendelser av parametriske kurver

Parametriske kurver har mange mange anvendelser. De klassiske anvendelsene er innen fysikk, som ett skreddersydd verktøy for å angi partikkelbaner. Med datateknologien har mange nye anvendelser kommet til. Innen datagrafikk er det alltid behov for å kunne representere geometrien som skal vises fram på skjermen, og kurver representeres da som regel på parametrisk form som her. Etterhvert har

det blitt vanlig også å lage film ved hjelp av datamaskin, der handlingen foregår i en virtuell verden som bare eksisterer inne i datamaskiner. Slike filmer filmes ikke på vanlig måte. I steden produseres hvert bilde digitalt og lagres på disk, basert på hvor det virtuelle kameraet er plassert i den virtuelle verdenen. I en slik sammenheng er det viktig å føre kameraet riktig, og kamerabaner representeres naturlig som parametriske kurver. Legg merke til at i en slik anvendelse er det ikke bare den geometrisk kamerabanen som er viktig, det er også av avgjørende betydning hvor fort kameraet beveger seg, med andre ord er det viktig hvilken parametrisk representasjon som er valgt blant de mange som alle representerer den samme geometriske banen.

En annen sentral anvendelse av parametriske kurver er innen font-teknologi (en font er en bestemt måte å tegne de ulike tegnene som er tilgjengelig ved trykking, i våre dager de tegnene som datamaskinen kan tegne). Omrisset av hver bokstav representeres ved en eller flere parametriske kurver, og når bokstaven skal tegnes på skjerm eller papir bestemmer maskinen hvilke punkter som skal skrus av eller på for å vise bokstaven på en pen måte. Vi skal se litt nærmere på dette i seksjonen om Bezier-kurver.

9.5 Bezier-kurver

Eksemplene i seksjon 9.4 illustrerte forhåpentligvis at vi kan representere et stort spekter av geometriske kurver ved hjelp av parametriske representasjoner. Ved å lagre formelen i en datamaskin med passende programvare kan vi alltid tegne den geometriske formen så pent som utskriftsmediet tillater. Spørsmålet er bare hvordan vi kan finne fram til en parametrisk representasjon som gir akkurat den formen vi er ute etter. Vi kan selvsagt prøve oss fram med formler av typen i figur 9.12, men det blir som regel fomling mer eller mindre i blinde.

Det vi trenger er en samling av enkle, men fleksible, parametriske representasjoner som inneholder frie koeffisienter som kan justeres slik at vi kan få fram ulike geometriske former. Vi kan da bruke teknikker som interpolasjon og minimering av feil til å beregne gode tilnærminger til gitte geometriske former. Hvis de frie koeffisientene har intuitive geometriske tolkninger, kan vi også gjøre bruk av disse basisrepresentasjonene til interaktivt å bygge opp en ønsket kurve ved å manipulere koeffisienter. Det viser seg at en generalisering av Bernstein-polynomene har de ønskede egenskapene.

Definisjon 9.11. *En Bezier-kurve av grad n i planet er en parametrisk kurve på formen*

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{c}_0 b_{0,n}(t) + \boldsymbol{c}_1 b_{1,n}(t) + \cdots + \boldsymbol{c}_n b_{n,n}(t), \qquad t \in [a,b],$$

der koeffisientene $(\boldsymbol{c}_i)_{i=0}^n$ er punkter i planet og $\{b_{i,n}\}_{i=0}^n$ er Bernstein-basisen på intervallet $[a,b]$ gitt ved

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-i}.$$

Koeffisientene kalles også kontrollpunktene til $\boldsymbol{p}$ *og den brudne linja som framkommer ved å forbinde kontrollpunktene med rette linjer kalles kontrolpolygonet til* $\boldsymbol{p}$.

Legg merke til at polynomene som inngår er 'vanlige' funksjoner som til hver t vi putter inn gir ut et reelt tall. Grunnen til at dette blir kurver og ikke funksjoner er at koeffisientene vi multipliserer med ikke lenger er tall, men punkter i planet. Uttrykket $\boldsymbol{c}_i b_{i,n}(t)$ betyr vanlig skalar multiplikasjon av en vektor med et tall; hvis $\boldsymbol{c}_i = (x, y)$ er $\boldsymbol{c}_i b_{i,n}(t) = \big(x\, b_{i,n}(t), y\, b_{i,n}(t)\big)$. Dette betyr at det er lett å regne ut verdier på en Bezier-kurve. Hvis vi har en kvadratisk Bezier-kurve med kontrollpunkter $\boldsymbol{c}_i = (x_i, y_i)$ for $i = 0,\ 1,\ 2$ så har vi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(t) &= \boldsymbol{c}_0 b_0(t) + \boldsymbol{c}_1 b_1(t) + \boldsymbol{c}_2 b_2(t) \\ &= \big(x_0 b_0(t) + x_1 b_1(t) + x_2 b_2(t), y_0 b_0(t) + y_1 b_1(t) + y_2 b_2(t)\big).\end{aligned}$$

En slik oppspalting kan vi gjøre for generell grad, så det å beregne et punkt på en Bezier-kurve i planet er derfor ikke noe annet enn å beregne verdien av to Bernstein-polynomer, ett for x-koordinaten og ett for y-koordinaten.

Vi ser at definisjonen av kontrollpunkter er enklere for kurver enn for funksjoner. For funksjoner måtte vi finne en x-verdi å assosiere hver koeffisient med, det er ikke lenger nødvendig siden koeffisientene er punkter i planet.

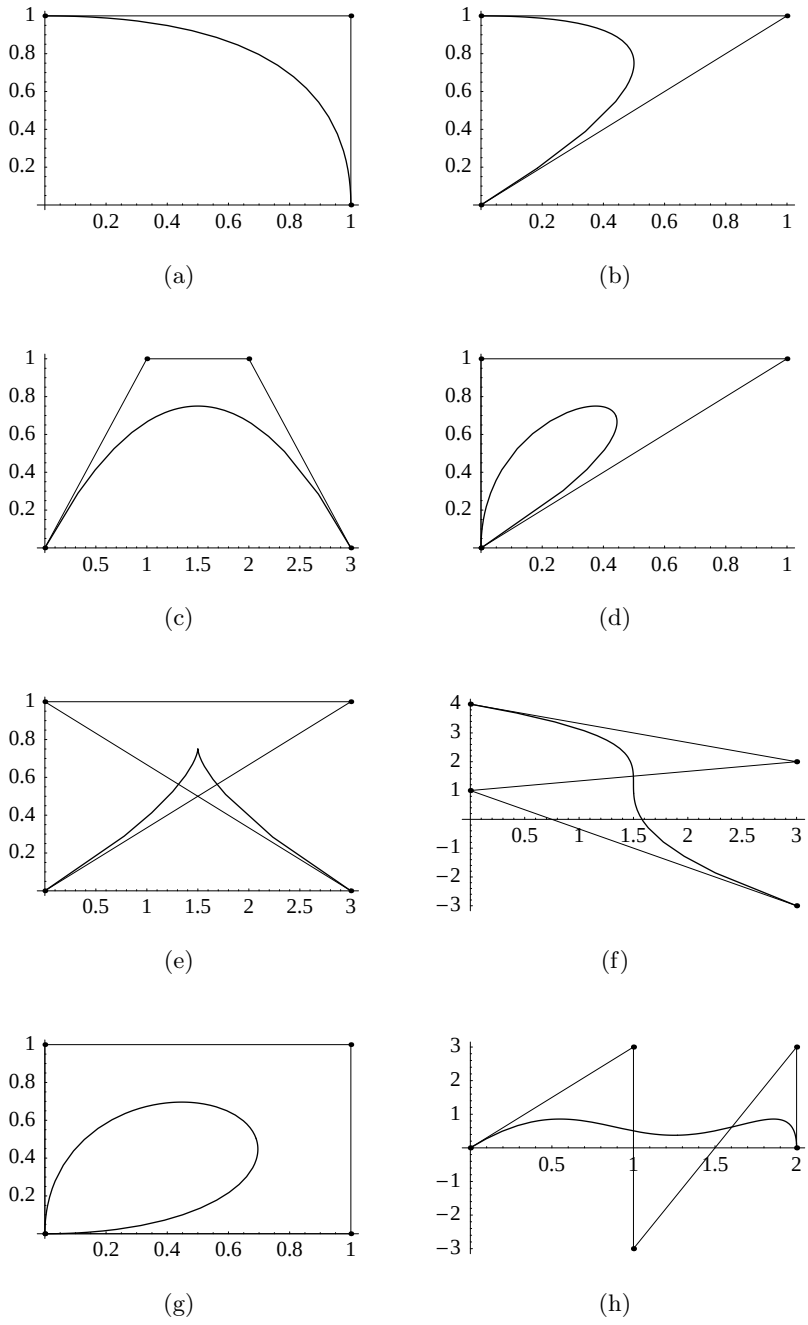
Bezier-kurven av grad 1 gitt ved $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{c}_0 b_{0,1}(t) + \boldsymbol{c}_1 b_{1,1}(t) = (1-t)\boldsymbol{c}_0 + t\boldsymbol{c}_1$ gir linjesegmentet som starter i $\boldsymbol{c}_0$ og ender i $\boldsymbol{c}_1$. En del eksempler på Bezier-kurver av høyere grad er vist i figur 9.14, og ikke overaskende ser vi at disse også interpolerer sitt første og siste kontrollpunkt. Vi ser i tillegg at tangentretningene i endene er gitt ved retningen til kontrollpolygonet i endene. Dette følger av de grunnleggende egenskapene ved Bernstein-basisen i lemma 9.3.

Setning 9.12. *En Bezier-kurve* $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c}_i b_i(t)$ *har verdiene* $\boldsymbol{p}(a) = \boldsymbol{c}_0$ *og* $\boldsymbol{p}(b) = \boldsymbol{c}_n$ *i endepunktene. Tangenten til kurven i* $t = a$ *er parallell med linja gjennom* $\boldsymbol{c}_0$ *og* $\boldsymbol{c}_1$*, mens tangenten i* $t = b$ *er parallell med linja gjennom* $\boldsymbol{c}_{n-1}$ *og* $\boldsymbol{c}_n$.

Plottene i figur 9.14 viser at Bezier-kurvene oppfører seg helt tilsvarende Bernstein-polynomene, men vi har i tillegg fått den ekstra friheten som kurver gir i forhold til funksjoner. Samtidig er det slik at for å få mange frihetsgrader å spille på som vi kan utnytte til å få mer kompliserte geometriske former, trenger vi Bezier-kurver av høy grad. Som for funksjoner er dette ikke så lurt med tanke på effektivitet og avrundingsfeil, og vi ser fra figurene at sammenhengen mellom kontrollpolygonet og kurven blir mindre tydelig når graden øker.

En god løsning å danne mer kompliserte former ved å hekte sammen flere Bezier-kurver, helt parallelt med konstruksjonen vi gjorde for Bernstein-polynomer.

Definisjon 9.13. *En sammensatt Bezier-kurve av grad* n *på intervallet* $[0, m]$ *er*



Figur 9.14. Åtte Bezier-kurver med kontrollpunkter. Kvadratiske ((a)og (b)), kubiske ((c)–(f)), grad 4 ((g) og (h)).

en parametrisk kurve på formen

$$\boldsymbol{p}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{p}_1(t), & \text{for } t \in [0,1); \\ \boldsymbol{p}_2(t), & \text{for } t \in [1,2); \\ \vdots & \\ \boldsymbol{p}_m(t), & \text{for } t \in [m-1,m]; \end{cases}$$

der $\boldsymbol{p}_i$ er en Bezier-kurve på intervallet $[i-1,i]$ for $i = 1, 2, \ldots, m$. En sammensatt Bezier-kurve kalles ofte bare en Bezier-kurve.

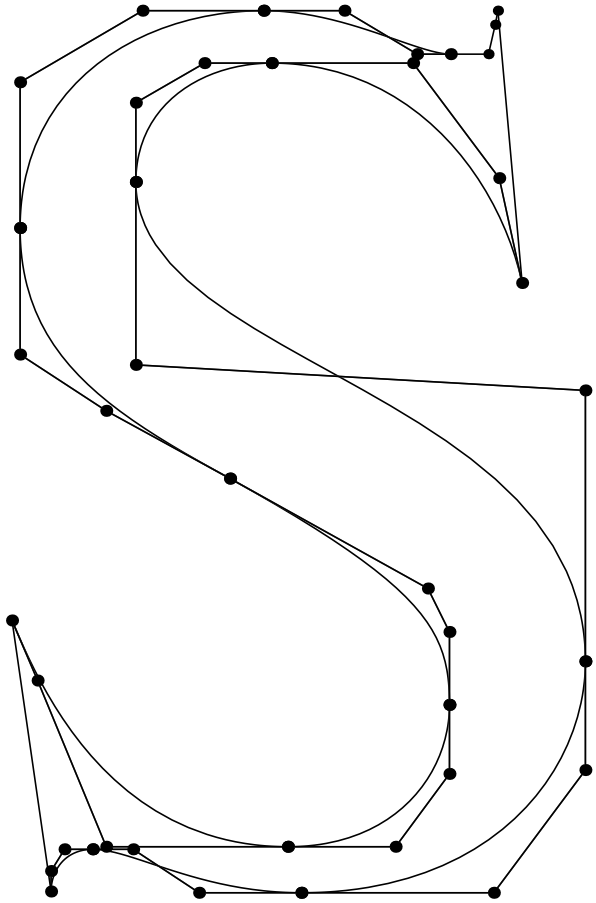
Her har vi antatt at alle delkurvene er definert på intervaller av bredde 1. Det er ingenting å tape på dette hvis vi bare er interessert i den geometriske formen som kurven representerer. Hvis vi for eksempel skal representere kamerabaner må vi være mer forsiktige siden bredden på intervallene sier noe om hvor lang tid vi bruker på å gjennomløpe hver kurvebit og dermed noe om hastigheten vi beveger kameraet med.

På grunn av den enkle sammenhengen mellom kontrollpolyogonet og kurven i endene er det enkelt å hekte sammen to Bezier-kurver slik at den sammensatte kurven blir både kontinuerlig og har kontinuerlig tangentretning.

Setning 9.14. *En sammensatt Bezier-kurve bestående av de to segmentene $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c}_i b_i(t)$ og $\boldsymbol{q}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{d}_i b_i(t)$ definert på henholdsvis $[0,1]$ og $[0,2]$, vil være kontinuerlig i $t = 1$ hvis og bare hvis $\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{d}_0$. Hvis den er kontinuerlig i $t = 1$ vil tangentretningen være kontinuerlig i $t = 1$ hvis og bare hvis de tre punktene $\boldsymbol{c}_{n-1}$, $\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{d}_0$ og $\boldsymbol{d}_1$ ligger på en rett linje.*

Den matematiske bakgrunnen vi nå har om Bezier-kurver bør være nok til å gi en grov ide om hvordan denne kurvetypen kan utnyttes til å representere geometriske objekter i planet. Det kommersielle programmet *Adobe Illustrator* som ble lansert i 1988 var det første programmet som gjorde Bezier-kurver tilgjengelig for 'massene'. Slike kurver hadde blitt brukt i bil- og flyindustri siden slutten av 1950-tallet til å representere geometrisk form, men da var brukerne ingeniører. Selskapet Adobe sin forretningside var å lage et dataspråk som kunne beskrive alt innhold på en papirside, inklusive tegninger og bokstaver, ved hjelp av matematikk, og til det utviklet de språket *Postscript*. Det grunnleggende primitivet i Postscript er kubiske Bezier-kurver, og Postscript-fonter er bygget opp av slike kurver. Ett eksempel er vist i figur 9.15. Ideen i Adobe Illustrator er å utnytte kubiske Bezier-kurver til frihåndstegning på datamaskin, og programmet er i dag et av de viktigste verktøyene for grafiske designere. Mange skrivere (blant annet på Universitet i Oslo) er basert på Postscript. Dette betyr at hver gang du skriver ut et dokument på en slik skriver må den regne ut en Bezier-kurve for hver eneste bokstav i dokumentet ditt!

Dataselskapet Apple utviklet tidlig på 1990-tallet en teknologi for å bryte Adobes monopol på font-området. Denne teknologien kalles *TrueType* og er basert



Figur 9.15. Bezier-kurve med kontrollpolygon som representerer bokstaven 'S' i Postscript-fonten Times-Roman. De ulike Bezier-segmentene ser du mellom kontrollpunktene som ligger på konturen til bokstaven. Legg merke til at den totale kurven også består av noen rette linjestykker.

på kvadratiske Bezier-kurver i steden for kubiske. TrueType er i dag svært utbredt og brukes også av Microsoft.

Oppgaver

9.1 Taylor-polynomene til e^x, $\cos x$ og $\sin x$ er

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots$$

Regn ut Taylor-polynomet til e^{ix} og bruk dette til å forklare at Eulers formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ er en rimelig definisjon av e^{ix}.

9.2 Utled egenskapene 1 og 2 ved Bernsteinbasisen gitt i lemma 9.3. Et nyttig redskap for å bevise egenskap 2 er binomialteoremet.

9.3 Utled egenskap 3 i lemma 9.3.

9.4 Utled egenskap 4 og 5 i lemma 9.3.

9.5 Utled egenskapene 1–3 i lemma 9.5 for Bernstein-polynomer av generell grad n på intervallet $[0, 1]$.

9.6 Sjekk at relasjonen

$$\binom{n}{i} = \frac{n-i+1}{i}\binom{n}{i-1}$$

stemmer.

9.7 a) Vis at polynomet x kan uttrykkes i Bernsteinbasisen som

$$x = \sum_{i=0}^{3} \frac{i}{3} b_{i,3}(x).$$

Hint: Sjekk at de deriverte på de to sidene av likhetstegnet er like og at de to sidene har samme verdi i ett punkt.

b) Bruk (a) til å vise relasjonen

$$\big(x, p(x)\big) = \sum_{i=0}^{3} (i/3, c_i) b_{i,3}(x).$$

(Dette må tolkes som en vektorrelasjon der venstresiden $\big(x, p(x)\big)$ og kontrollpunktene $(i/3, c_i)_{i=0}^{3}$ er punkter i planet, mens $b_{i,3}(x)$ for hver x er en skalar.) Denne relasjonen viser at grafen til $p(x)$ er et veiet gjennomsnitt av sine kontrollpunkter.

9.8 Programmer algoritme 9.8 og test programmet ved å plotte ut noen av Bernstein-polynomene i figur 9.7 og 9.8.