Løsningsforslag til "prøveunderveiseksamen" i MAT-INF 1100, H-03

Denne prøveeksamenen har samme format som den "virkelige" underveiseksamenen, og inneholder oppgaver av samme type og vanskelighetsgrad. De 15 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 5 teller 4 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å svare feil.

Oppgave- og svarark

1) Det binære tallet 1010101 er det samme som det desimale tallet

- ☐ 12
- ☐ 67
- ☐ 54
- ☑ 85
- ☐ 91

Løsningsskisse.

$$1010101_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 85_{10}.$$

2) Skrevet i totallssystemet blir tallet 183

- ☑ 10110111
- ☐ −1010101
- ☐ 11100
- ☐ 10110011
- ☐ 11001111

Løsningsskisse.

$$10110111_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 183_{10}.$$

3) Det reelle tallet $1 + \sqrt{2}$ er

- ☐ $1 - \sqrt{2}$
- ☐ et rasjonalt tall
- ☐ et naturlig tall

- [ ] ikke definert
- [x] et irrasjonalt tall

Løsningsskisse. Faktakunnskap, se kapittel 2 i Kalkulus.

4) Det reelle tallet $\dfrac{6}{7\sqrt{7}-7} - \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ er

- [ ] et irrasjonalt tall
- [ ] et negativt tall
- [ ] 7
- [ ] 0
- [x] et rasjonalt tall

Løsningsskisse. Hvis vi setter på felles brøkstrek får vi

$$\frac{6}{7\sqrt{7}-7} - \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}-7\sqrt{7}+7}{\sqrt{7}(7\sqrt{7}-7)} = \frac{7-\sqrt{7}}{49-7\sqrt{7}} = \frac{7-\sqrt{7}}{7(7-\sqrt{7})} = \frac{1}{7}$$

som er et rasjonalt tall.

5) Den minste øvre skranken til mengden $\{x : |x-2| < 2\}$ er

- [ ] 0
- [ ] 2
- [ ] $\sqrt{2}$
- [x] 4
- [ ] -2

Løsningsskisse. Når $x \geq 2$ sier ulikheten at $x - 2 < 2$ eller $x < 4$. Når $x \leq 2$ sier ulikheten $-(x-2) < 2$ eller $x > 0$. Mengden er altså gitt ved intervallet $(0, 4)$. Fra kapittel 2 vet vi at den minste øvre grensen for dette itnervallet er 4 (også lett å se).

6) Den minste øvre skranken til mengden $\{x : x^2 + 2 < 3x\}$ er

- [ ] 3
- [ ] 0
- [x] 2
- [ ] $\sqrt{3}$
- [ ] 1

Løsningsskisse. Ulikheten som beskriver denne mengden kan også skrives $x^2 - 3x + 2 < 0$. Andregradspolynomet på venstre side er en parabel med nullpunkter i 1 og 2 som er negativ i intervallet $(1, 2)$ og dette er dermed mengden vi skal finne minste øvre skranke til. Dermed ser vi at minste øvre skranke er 2.

7) Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a+1)^{19}$ der a er ulik 0, hva blir da koeffisienten foran a^{17}?

- ☐ 17
- ☐ 136
- ☐ 153
- ☑ 171
- ☐ 19

Løsningsskisse. Fra binomialteoremet vet vi at koeffisienten foran a^{17} er

$$\binom{19}{17} = \frac{19!}{17! \cdot (19-17)!} = \frac{18 \cdot 19}{2} = 9 \cdot 19 = 171.$$

8) Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for spesielle verdier av a og b når det regnes med flyttall?

- ☑ $a+b$
- ☐ a/b
- ☐ $a*b$
- ☐ $2a/b$
- ☐ $\sqrt{ab}$

Løsningsskisse. Jeg har fått beskjed fra et av oraklene at mange har lurt på denne oppgaven. Jeg regner med at alle er enig i at $a+b$ kan gi stor feil når a og b har motsatt fortegn, men er neste like store i tallverdi. Et annet potensielt problem er underflow som kan forekomme i alle uttrykkene. Formelt sett er det riktig at det gir stor relativ feil, men husk på at vi da er i en situasjon der svaret blir nesten 0. Relativ feil er ikke definert når svaret er 0, og fungerer svært dårlig som feilmål når svaret er svært null. Alternativ 1 er derfor det eneste tilfellet som virkelig kan være problematisk.

9) Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- ☐ Det fins et reelt tall som er større enn alle naturlige tall
- ☑ Ethvert reelt tall kan tilnærmes vilkårlig godt med et rasjonalt tall
- ☐ Avrundingsfeil kan aldri bli et problem på en lommeregner
- ☐ Det er bare et endelig antall irrasjonale tall
- ☐ Det er et uendelig antall 64-bits flyttall

Løsningsskisse. I og med at alle åpne intervaller inneholder både rasjonale og irrasjonale tall må det være mulig å tilnærme et vilkårlig irrasjonalt tall så godt vi ønsker med et rasjonalt tall.

10) Funksjonen f er definert på intervallet $[1,2]$, er kontinuerlig og tilfredstiller betingelsen $f(1) \cdot f(2) < 0$. Etter 9 iterasjoner med halveringsmetoden vil vi ha et estimat for et av nullpunktene til f med absolutt feil mindre enn

- [ ] -0.3
- [x] 0.002
- [ ] 0.0001
- [ ] 10^{-5}
- [ ] e^{-15}

Løsningsskisse. Feilestimatet for halveringsmetoden sier at feilen etter n iterasjoner er høyst $(b-a)/2^n$. Setter vi inn $a = 1$, $b = 2$ og $n = 9$ får vi at feilen er høyst $2^{-9} = 0.001953125$ som er mindre enn 0.002.

11) Hvilken av følgende differensligninger er lineær?

- [ ] $x_n - \sin(x_{n-1}) + x_{n-2} = 0$
- [ ] $e^{x_n} + x_{n-1} = 0$
- [ ] $x_n + x_{n-1}x_{n-2} = 0$
- [x] $x_n + n\,x_{n-1} + x_{n-2} = 0$
- [ ] $\sqrt{x_n} - x_{n-1} = 0$

Løsningsskisse. En differensligning er lineær hvis ligningen kun inneholder en sum av ledd der eneste operasjon som involverer den ukjente følgen er multiplikasjon med tall som ikke involverer den ukjente følgen. Dette gjelder kun for 4. alternativ.

12) Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 1$$

er gitt ved

- [ ] $x_n = (3 \cdot 2^n - 4^n)/2$
- [ ] $x_n = 0$
- [ ] $x_n = 2^{n+1} - 3^n$
- [ ] $x_n = 4n$
- [x] $x_n = 1$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen er $r^2 + r - 2 = 0$ som har røtter $r_1 = -2$ og $r_2 = 1$. Den generelle løsningen er dermed $x_n = C(-2)^n + D1^n = C(-2)^n + D$. De to startverdiene plukker ut løsningen $x_n = 1$.

Denne oppgaven kan også løses direkte ved å huske på at løsningen er entydig, og siden $x_n = 1$ både passer i ligningen og med de to startverdiene må dette være løsningen.

13) En differensligning har karakterstisk ligning med røtter $r_1 = 1 + i$ og $r_2 =$

$1 - i$. Differensligningen er da gitt ved

- [x] $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - 8x_{n+1} + x_n = 0$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen kan skrives

$$\big(r - (1+i)\big)\big(r - (1-i)\big) = r^2 - (1 + i + 1 - i)r + (1 - i^2) = r^2 - 2r + 2.$$

Dermed følger det at 1. alternativ er riktig.

14) Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 3$$

er gitt ved

- [ ] $x_n = 4^n - 1$
- [x] $x_n = n\,3^n$
- [ ] $x_n = 3\,(3^n - 1)/2$
- [ ] $x_n = 3n$
- [ ] $x_n = 7n - 4$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 6r + 9 = 0$ som har en dobbel rot i $r = 3$. Den generelle løsningen er dermed $x_n = (C + Dn)3^n$. Siden $0 = x_0 = C$ og $3 = x_1 = D \cdot 3$ er den generelle løsningen $x_n = n3^n$.

15) Numerisk simulering av differensligningen $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$ med startverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 4$ vil gi

- [ ] store problemer med avrundingsfeil
- [x] ingen problemer med avrundingsfeil
- [ ] $x_n = (n + 1)^2$
- [ ] en løsning som alltid er 0
- [ ] $x_2 = 3$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 4r + 1 = 0$ som har røtter $r_1 = 2 - \sqrt{3}$ og $r_2 = 2 + \sqrt{3}$. Vi legger merke til at $|r_1| < 1$ mens $r_2 > 3$. Startverdiene gjør at den generelle løsningen blir på formen $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$ der både C og D vil være forskjellige fra 0. Dette betyr at leddet Dr_2^n raskt vil dominere løsningen siden r_2^n kan bli vilkårlig stort når n er stor. Men legg merke til at dette ikke kommer av avrundingsfeil, det er den eksakte løsningen som har denne egenskapen. Det er altså ikke slik at løsningen går mot null og dermed kan domineres av et ledd som blir stort bare på grunn av avrundingsfeil.

16) Vi lar P_n betegne påstanden at formelen

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

er sann. Et induksjonsbevis for dette kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sann, for å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden P_k er sann har vi

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{1}{8}(2k+1)^2 + k + 1 = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9) \\ &= \frac{1}{8}(2k+3)^2 = \frac{1}{8}\bigl(2(k+1)+1\bigr)^2. \end{aligned}$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [x] Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er feil, og både del og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- [ ] Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Løsningsskisse. Del 1 av beviset er for kjapp. Sjekker vi så ser vi at når $n = 1$ er venstre side 1 mens høyre side er 9/8, altså er P_1 ikke sann.

17) Differensligningen

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}^2, \qquad \text{der } x_0 = 0 \text{ og } x_1 = 1$$

er gitt. Vi har tro på at følgende påstand er sann:

P_n: For alle heltall $n \geq 0$ gjelder det at x_{3n} er et partall mens x_{3n+1} og x_{3n+2} begge er oddetall.

Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. For $n = 0$ ser vi at $x_{3n} = x_0 = 0$ som er et partall, mens $x_{3n+1} = x_1 = 1$ som er et oddetall. Vi har dessuten at $x_{3n+2} = x_2 = x_1 + x_0^2 = 1$ også er et oddetall så P_n er sann for $n = 0$.

2. Anta at vi har vist at P_n er sann for $n = 0, \ldots, k-1$, vi må vise at da er også P_k sann. Vi har $x_{3k} = x_{3k-1} + x_{3k-2}^2$, og fra induksjonshypotesen vet vi at x_{3k-2} og x_{3k-1} begge er oddetall. Da er også x_{3k-2}^2 et oddetall og siden summen av to oddetall er et partall er x_{3k} et partall. På samme måte har vi $x_{3k+1} = x_{3k} + x_{3k-1}^2$. Vi vet nå at x_{3k} er et partall mens x_{3k-1}^2 er et oddetall. Dermed er x_{3k+1} et oddetall. Til slutt må vi sjekke x_{3k+2}. Vi har $x_{3k+2} = x_{3k+1} + x_{3k}^2$ og ut fra vi vi nettopp har vist er x_{3k+1} et oddetall mens x_{3k} er et partall. Da er også x_{3k}^2 et partall så x_{3k+2} er summen av et partall og et oddetall og dermed et oddetall.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 1 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er feil, men induksjonsbeviset er riktig
- [x] Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- [ ] Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Løsningsskisse. Dette beviset er altså korrekt.

18) Løsningen av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n$$

der $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$ er

- [ ] $x_n = 2^n - n$
- [ ] $x_n = n$
- [ ] $x_n = (n^2 + n)/2$
- [x] $x_n = n + 2 - 2^n$
- [ ] $x_n = n\,2^n - 2n + 1$

Løsningsskisse. Den karaktertistiske ligningen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har en dobbel rot i $r = 2$. Den generelle løsningen av den homogene ligningen er derfor $x_n^h = (C + Dn)2^n$. På grunn av høyresidens form prøver vi med en partikulærløsning på formen $x_n^p = A + Bn$. Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$A - 2B + Bn = n,$$

og dette skal holde for alle verdier av n. Følgelig må vi ha $B = 1$ og $A = 2B = 2$ slik at partikulærløsningen er $x_n^p = 2 + n$. Den generelle løsningen er derfor

$$x_n = x_n^h + x_n^p = 2 + n + (C + nD)2^n.$$

Startverdiene gir da $1 = x_0 = 2 + C$ og $1 = x_1 = 3 + 2(C + D)$ som gir $C = -1$ og $D = 2$.

19) Løsningen av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} + x_n = n^2$$

der $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$ er gitt ved

- [ ] $x_n = n - 1$
- [ ] $x_n = n^2 - 1$
- [x] $x_n = \frac{1}{2}n(n-2) + \cos(n\pi/2) + \frac{1}{2}\sin(n\pi/2)$
- [ ] $x_n = n^2 + \sin(n\pi/2) + \cos(n\pi/2)$
- [ ] $x_n = \cos(n\pi/2)$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen $r^2 + 1 = 0$ har de to kompleks konjugerte røttene r og $\bar{r}$ der $r = i$. Dessuten kan vi skrive $r = e^{i\pi/2}$ på polarform. Dermed er den generelle løsningen av den homogene ligningen $x_n^h = C\cos(n\pi/2) + D\sin(n\pi/2)$. For å finne en partikulær løsning prøver vi med $x_n^p = A_1 + A_2 n + A_3 n^2$. Vi setter inn og finner at da må

$$2A_1 + 2A_2 + 4A_3 + (2A_2 + 4A_3)n + 2A_3 n^2 = n^2$$

for alle verdier av n. Det gir $2A_3 = 1$, $2A_2 + 4A_3 = 0$ og $2A_1 + 2A_2 + 4A_3 = 0$ som har løsningen $A_1 = 0$, $A_2 = -1$ og $A_3 = 1/2$ slik at $x_n^p = n(n-2)/2$ så den generelle løsningen er

$$x_n = x_n^p + x_n^h = \frac{n(n-2)}{2} + C\cos(n\pi/2) + D\sin(n\pi/2).$$

Setter vi inn startverdiene får vi $1 = x_0 = C$ og $0 = x_1 = -1/2 + D$ slik at $C = 1$ og $D = 1/2$.

20) Vi bruker halveringsmetoden på en funksjon f definert på intervallet $[0,1]$. Funksjonen er slik at når vi skal velge neste intervall vil vi annenhver gang havne i venstre og høyre delintervall. Hvis vi kaller følgen av midtpunkter (m_i) blir med andre ord $m_1 = 1/2$, deretter havner vi i venstre delintervall slik at $m_2 = 1/4$, neste gang havner vi i høyre delintervall slik at $m_3 = 3/8$, neste gang i venstre delintervall slik at $m_4 = 5/16$, neste gang i høyre delintervall osv.

Midtpunktene kan beskrives ved differensligningen

- ☐ $m_n = m_{n-1}/2, \qquad m_0 = 1$
- ☐ $m_n = \frac{1}{2}(m_{n-1} + m_{n-3}), \qquad m_{-1} = 0, \quad m_0 = 1$
- ☑ $m_n = \frac{1}{2}(m_{n-1} + m_{n-2}), \qquad m_{-1} = 1, \quad m_0 = 0$
- ☐ $m_n = \frac{1}{2}(m_n + m_{n-1}), \qquad m_0 = 1$
- ☐ $m_n = \frac{1}{2}(1 + m_{n-1}), \qquad m_0 = 1$

Løsningsskisse. Lag en tegning så ser du det!

Det var det!!