**Underveiseksamen i MAT-INF 1100, 17. oktober 2003**
**Tid: 9.00–11.00**

| Kandidatnummer: |
|---|
| |

De 15 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 5 teller 4 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

## Oppgave- og svarark

**1)** Det binære tallet 1100101 er det samme som det desimale tallet

- ☐ 50
- ☐ 104
- ☐ 101
- ☐ 93
- ☐ 81

**2)** Skrevet i totallssystemet blir tallet 140

- ☐ 10110100
- ☐ −1010100
- ☐ 10001100
- ☐ 10110001
- ☐ 11001100

**3)** Det reelle tallet $1/(1+\sqrt{2})$ er

- ☐ $1-\sqrt{2}$
- ☐ et rasjonalt tall
- ☐ et naturlig tall
- ☐ ikke definert
- ☐ et irrasjonalt tall

**4)** Det reelle tallet $\dfrac{4}{3\sqrt{5}-5} - \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ er

- ☐ et irrasjonalt tall
- ☐ et negativt tall
- ☐ 5
- ☐ 0
- ☐ et rasjonalt tall

**5)** Den største nedre skranken til mengden $\{x : |2x+1| < 1\}$ er

- ☐ $0$
- ☐ $2$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $-1$
- ☐ $-2$

**6)** Den minste øvre skranken til mengden $\{x : x^2 - 2 < 2x\}$ er

- ☐ $\sqrt{3}$
- ☐ $1-\sqrt{3}$
- ☐ $2$
- ☐ $1+\sqrt{3}$
- ☐ $1$

**7)** Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a+1)^{31}$ der $a$ er ulik 0, hva blir da koeffisienten foran $a^{29}$?

- ☐ 17
- ☐ 359
- ☐ 465
- ☐ 431
- ☐ 546

**8)** Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for spesielle verdier av $a$ og $b$ når det regnes med flyttall, vi ser bort fra underflow og overflow, og $a$ og $b$ er slik at operasjonene gir mening?

- ☐ $\sqrt{a-b}$
- ☐ $a^2b$
- ☐ $2a$
- ☐ $a/b$
- ☐ $\sqrt{ab}$

**9)** Hvilket av følgende utsagn er sant?

- ☐ De naturlige tallene er ikke en delmengde av de rasjonale tallene
- ☐ Når kvadratroten av et positivt heltall ikke er heltallig er den irrasjonal
- ☐ Avrundingsfeil skaper alltid problemer når vi arbeider med heltall
- ☐ Det er bare et endelig antall rasjonale tall
- ☐ Det er et uendelig antall 64-bits heltall

**10)** Funksjonen $f$ er definert på intervallet $I = [a, b]$, er kontinuerlig og tilfredstiller betingelsen $f(a) \cdot f(b) < 0$. Vi anvender halveringsmetoden for å finne en tilnærming til et nullpunkt i $I$, og etter 11 iterasjoner vet vi at den absolutte feilen ligger i intervallet $(0.0014, 0.0015)$. Intervallet $I$ må da ha bredde $b - a$ lik

- ☐ 3
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 0.5
- ☐ $e$

**11)** Hvilken av følgende differensligninger er lineær?

- ☐ $x_n - \log(x_{n-1}) + x_{n-2} = 0$
- ☐ $e^{\sin x_n} + x_{n-1} = 0$
- ☐ $x_n^2 + x_{n-2} = 0$
- ☐ $x_n + n^{1/2}\, x_{n-1} + x_{n-2} = 0$
- ☐ $\sqrt{x_n} - x_{n-1} = 0$

**12)** Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = -3$$

er gitt ved

- ☐ $x_n = (1 - 4^n)/2$
- ☐ $x_n = (-1)^n - 2^n$
- ☐ $x_n = -3n$
- ☐ $x_n = n - 1 - 3^n$
- ☐ $x_n = -(n-1)^2 - 2^n$

**13)** En differensligning har karakterstisk ligning med røtter $r_1 = 3 + 2i$ og $r_2 = 3 - 2i$. Differensligningen er da gitt ved

- ☐ $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$
- ☐ $x_{n+2} - x_n = 0$
- ☐ $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = 0$
- ☐ $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 13x_n = 0$
- ☐ $x_{n+2} - 8x_{n+1} + x_n = 0$

**14)** Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = \sqrt{3}$$

er gitt ved

- ☐ $x_n = 4^n - 1$
- ☐ $x_n = 2^n \cos(2n\pi/3)$
- ☐ $x_n = 2^n \sin(2n\pi/3)$
- ☐ $x_n = n\sqrt{3}$
- ☐ $x_n = 2^n \sin(n\pi/3)$

**15)** Numerisk simulering av differensligningen $x_{n+2} - \dfrac{7}{3}x_{n+1} + \dfrac{2}{3}x_n = 0$ med 64-bits flyttall og startverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 1/3$ vil gi

- ☐ store problemer med avrundingsfeil
- ☐ ingen problemer med avrundingsfeil
- ☐ $x_n = (n+1)^2/3$
- ☐ $x_n = 0$
- ☐ $x_n = \texttt{NaN}$

**16)** Vi lar $P_n$ betegne påstanden at formelen

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = (n-1)^2 + 1$$

er sann for $n \geq 1$. Et induksjonsbevis for dette kan være som følger:

1. Når $n = 1$ er både høyre og venstre side lik 1, så formelen stemmer i dette tilfellet.
2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sann, for å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at $P_{k+1}$ også er sann. Siden $P_k$ er sann har vi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2k + 1 &= (k-1)^2 + 1 + 2k + 1 \\ &= k^2 - 2k - 1 + 1 + 2k + 1 = k^2 + 1. \end{aligned}$$

Vi ser dermed at om $P_k$ er sann så må også $P_{k+1}$ være sann og dermed er $P_n$ sann for alle $n \geq 1$.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- ☐ Påstanden $P_n$ er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden $P_n$ er feil, og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden $P_n$ er feil, og både del 1 og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Både påstanden $P_n$ og induksjonsbeviset er riktige
- ☐ Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

**17)** La $f_n$ betegne Fibonaccifølgen definert ved

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geq 0, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1. \tag{1}$$

I denne oppgaven skal vi finne en formel for løsningen av differensligningen

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2}, \qquad n \geq 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2.$$

Vi har tro på at følgende påstand er sann:

$P_n$: For alle heltall $n \geq 0$ gjelder det at $x_n = 2^{f_n}$, der $f_n$ er Fibonacci-følgen gitt ved (1) over.

Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. Vi ser med en gang at $x_0 = 1 = 2^0 = 2^{f_0}$ og $x_1 = 2 = 2^1 = 2^{f_1}$ så $P_0$ og $P_1$ er begge sanne.

2. Anta at vi har vist at $P_n$ er sann for $n = 0, \ldots, k$, vi må vise at da er også $P_{k+1}$ sann. Vi har
$$x_{k+1} = x_k \cdot x_{k-1} = 2^{f_k} 2^{f_{k-1}} = 2^{f_k + f_{k-1}} = 2^{f_{k+1}}$$
der den siste likheten følger fra (1). Fra dette følger det at $P_n$ må være sann for alle $n \geq 0$.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- ☐ Påstanden $P_n$ er sann, men del 1 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden $P_n$ er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden $P_n$ er feil, men del 2 av induksjonsbeviset er riktig
- ☐ Både påstanden $P_n$ og induksjonsbeviset er riktige
- ☐ Påstanden $P_n$ er feil, men del 1 av induksjonsbeviset er riktig

**18)** Løsningen av den inhomogene differensligningen
$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n$$
der $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$ er

- ☐ $x_n = 2^n - n$
- ☐ $x_n = 2^n - n\,(-3)^n$
- ☐ $x_n = (n^2 + n)/2$
- ☐ $x_n = n + 2 - 2^n$
- ☐ $x_n = 3^n - n2^n$

**19)** Løsningen av den inhomogene differensligningen
$$x_{n+1} - 2x_n = n^2$$
der $x_0 = 0$ er gitt ved

- ☐ $x_n = n$
- ☐ $x_n = n^2$
- ☐ $x_n = 3(2^n - 1) - 2n - n^2$
- ☐ $x_n = 2^n - 1$
- ☐ $x_n = 2^n - n^2 - 1$

**20)** Vi bruker Newtons metode $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ på funksjonen $f(x) = x^2 - A$ der $A$ er et positivt, reelt tall. Hvis vi betegner feilen med $e_n = x_n - \sqrt{A}$ så har vi

- ☐ $e_{n+1} = \dfrac{e_n}{2x_n}$
- ☐ $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2x_n}$
- ☐ $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{x_n^2}$
- ☐ $e_{n+1} = \dfrac{e_n e_{n-1}}{x_n}$
- ☐ $e_{n+1} = \log e_n$

*Det var det!!*