Numerisk løsning av differensiallikninger

Forelesning 16 November 2004

MAT-INF1100

Differensiallikning av andre orden

(1) $$y'' = F(x, y, y'), \quad y(0) = b_0, \quad y'(0) = b_1$$

Vi har formler for løsning når:

$$F = f(x) - py' - qy,$$

der p og q er konstante.
Ellers: Numerisk løsning (stort sett)

Omskrivning til 2 likninger av orden 1

Definerer $z = y' \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= F(x, y, z) \end{aligned}$$

med $y(0) = b_0$, $z(0) = b_1$.
Sett av likninger.

Generelt kan en likning av orden n gjøres om til n likninger av orden 1.

Eulers metode

Definerer

$$y_n \approx y(n\Delta x), \quad z_n \approx y(n\Delta x),$$

der Δx er inkrementet i metoden.

Initialbetingelser gir z_0, y_0.
Rekursjon fra $n-1$ til n:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} = z_{n-1}$$

$$\frac{z_n - z_{n-1}}{\Delta x} = F((n-1)\Delta x, y_{n-1}, z_{n-1})$$

Eulers metode; eksplisitt form

Rekursjon fra $n-1$ til n:

$$y_n = y_{n-1} + \Delta x z_{n-1}$$

$$z_n = z_{n-1} + \Delta x F((n-1)\Delta x, y_{n-1}, z_{n-1})$$

Testproblem med kjent løsning

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Løsning

$$y(x) = \cos(x)$$

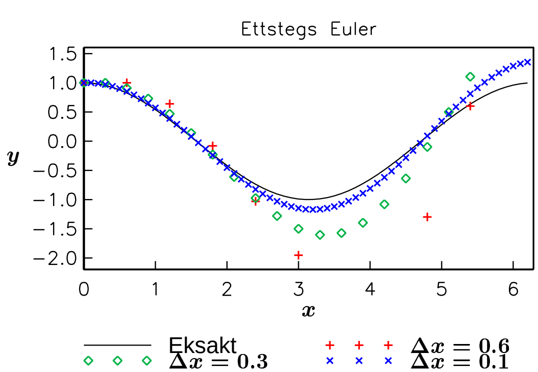
Ren svingning

Omskrivning

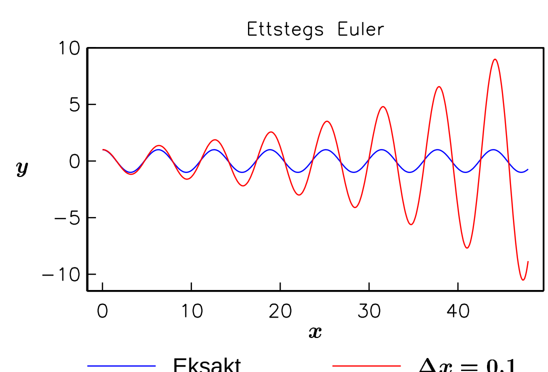
$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -y \end{aligned}$$

med $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Eulers metode



Eulers metode, større område



Observasjoner

Eulers metode brukes lite i praksis, bla.a. fordi

- Eulers metode er unøyaktig; selv liten Δx git stor feil. Det er fordi vi bruker en ensidig differens for den deriverte.
- En svingende løsning, som den i eksemplet, behandles svært dårlig med Eulers metode: Den er instabil – feilen vokser over alle grenser.

Kan vi vise at Eulers metode er instabil i eksemplet vårt ?

Vårt eksempel og Eulers metode

$$y_n = y_{n-1} + \Delta x z_{n-1}$$
$$z_n = z_{n-1} - \Delta x y_{n-1}$$

For $n > 0$ kan vi elimenere z'ene i den nederste vha. den øverste

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta x^2} = -y_{n-1}$$

Kommentar: midpunkt-diff. for y'' insatt i $y'' = -y$.
Omskrivning:

$$y_{n+1} - 2y_n + (1 + \Delta x^2) y_{n-1} = 0$$

Andre ordens differenslikning

Løsning av differenslikning, I

Eulers metode betyr at vi løser (nummerer om)

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + (1 + \Delta x^2) y_n = 0, \quad n \geq 0$$

Men denne kan vi løse i formel! Setter inn $y_n = r^n$

$$r^2 - 2r + 1 + \Delta x^2 = 0$$

dvs

$$r_1 = 1 + \mathrm{i}\Delta x, \quad r_2 = 1 - \mathrm{i}\Delta x$$

Løsning av differenslikning, II

Dette er tilfelle 3 i kap. 4 i Kalkulus.
Setning (4.1.14)

$$y_n = \rho^n \left(E\cos(n\theta) + F\sin(n\theta)\right)$$

der θ er arumentet til r_1 og

$$\rho = |r_1| = \sqrt{1 + \Delta x^2} > 1$$

Løsning vokser over alle grenser når $n \to \infty$

Eulers midtpunktmetode

Rekursjon fra $n-1$ til n i to steg.

1: prediktorsteg; Eulers metode

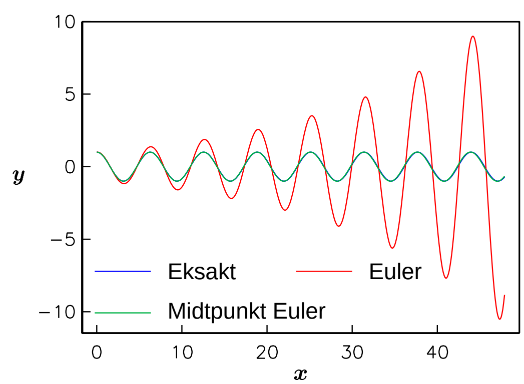
$$y_* = y_{n-1} + \Delta x z_{n-1}$$
$$z_* = z_{n-1} + \Delta x F((n-1)\Delta x, y_{n-1}, z_{n-1})$$

2: korrektorsteg

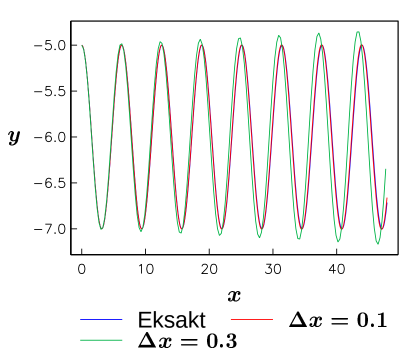
$$y_n = y_{n-1} + \tfrac{1}{2}\Delta x (z_{n-1} + z_*)$$
$$z_n = z_{n-1} + \Delta x F\left((n - \tfrac{1}{2})\Delta x, \tfrac{1}{2}(y_{n-1} + y_*), \tfrac{1}{2}(z_{n-1} + z_*)\right)$$

En “kvasi-midtpunktformel” om $x = (n - \frac{1}{2})\Delta x$.

Sammenlikning for $\Delta x = 0.1$



Midtpunkt Euler, konvergens



Stadig “litt” instabil

M.-Euler, Runge-Kutta, $\Delta x = 0.3$