Simulering av differenslikninger

Programmering i Java med eksempler

Forelesning 20 september 2004

MAT-INF1100

Differenslikning av orden 2

$$(1) \quad x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad x_0 = b_0, \quad x_1 = b_1$$

Vi kjenner formler for generelle løsninger
I stedet: direkte simulering av (1)
Program skal

- Spørre etter og lese b, c, b_0, c_0 og maks. n fra skjerm
- Løse differenslikning
- Skrive resultat til fil
  Skal noe gjøres med svaret, feks. plotting, kan vi ikke bare la tallene “rulle” over skjermen

Lesing av parametere

Vi bruker **easyIO**, beskrevet i *Rett på Java*, kap. 3

Spørsmål

Deklarasjon av objekt og utskrift

```
Out skjerm=new Out();
....
skjerm.outln("gi koeff. b og c");
```

Innlesning

Deklarasjon av objekt og innlesning

```
In les=new In();
...
b=les.inDouble();c=les.inDouble();les.inLine();
```

Skriving til fil– lett!

Omhandlet i *Rett på Java*, kap. 9
Dersom vi vil åpne og skrive på en fil **solv.dat**, brukes filnavn som argument i deklarasjon av ny **Out**

Out utf=new Out(”solv.dat”);

...
utf.out(x);....

....
utf.close();

Filen må lukkes etter at den er ferdig skrevet.
Vi bruker enkel uformattert utskrift – ikke pent, men det virker.

Etterbehandling av fil

Vi vil se på den på skjermen under Linux. Skriv

less solv.dat

Vi vil bytte navn til **res.dat**

mv solv.dat res.dat

Eller fjerne fila

rm solv.dat

Et vanlig ønske er å framstille datane grafisk. I dag viser jeg bare resultatet, men sier ikke hvordan!

Selve beregningen

Den numeriske kjernen i løsningen er en løkke.
La oss bruke **x** og **xprev** for x_n og x_{n-1}

Bom 1

```
for(n=2;.....) {
x=–b*x–c*xprev;
xprev=x;};
```

Galt! Hvorfor ?

Bom 2

```
for(n=2;.....) {
xprev=x;
x=–b*x–c*xprev;};
```

Galt igjen! Hvorfor ?

Bruk av mellomlagring

Dette virker

Vi bruker en ekstra variabel **tmp**

```
for(n=2;.....) {
tmp=x;
x=–b*x–c*xprev;
xprev=tmp;};
```

Nå kan vi sette sammen programmet.

Test-eksempel; Fibonacci følgen

$b = c = -1$, $b_0 = b_1 = 1 \Rightarrow$

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1$$

Svar: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Nytt eksempel

Likner på det i kompendiumet, 4.2.
$b = -31/3$, $c = 10/3$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1/3 \Rightarrow$

$$x_{n+2} - \frac{31}{3} x_{n+1} + \frac{10}{3} x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

Karakteristisk polynom=0

$$r^2 - \frac{31}{3} r + \frac{10}{3} = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = 10$$

Løsning som oppfyller initialbetingelser

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Simulering med $b = -31/3$, $c = 10/3$

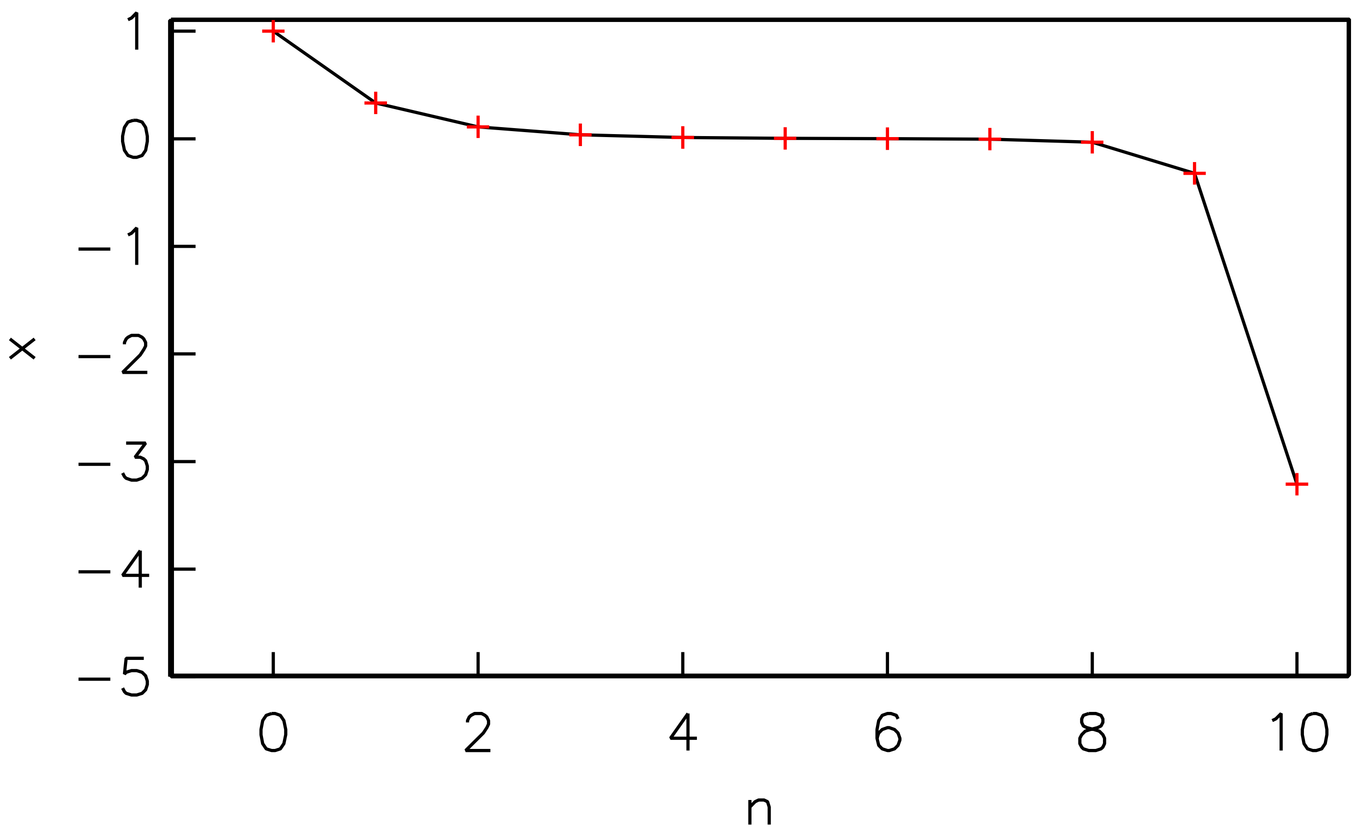
Dialog med programmet

gi koeff. b og c
-10.33333333 3.33333333
gi initialbet. b0 og b1
1.0 0.33333333
gi antall ledd (max n)
12

Løsning bør være nær $x_n = (\frac{1}{3})^n$.

Spesielt $x_n \to 0$ når $n \to \infty$

Graf



Det ser bra ut fram til $n = 8$. Da går det helt galt!
Hva er feil ?

Hva går galt

Feilkilder i simulering

1. Initialbetingelser gis inn unøyaktig, feil er av orden 10^{-9}
2. Koeffissienter gis også inn feil
3. Avrundingsfeil påvirker utregning av hver ny x_n

pkt. 1 gir litt gale initialbetingelser og løsning blir

$$x_n = (1 + \delta)\,(1/3)^n + \epsilon\,(10)^n\,,$$

der ϵ og δ er av orden 10^{-9}. Nå vil $x_n \to \pm\infty$ når $n \to \infty$. Ved omtrent $n = 9$ blir det andre ledd av orden 1.

Uansett hva vi gjør vil dette fenomenet dukke opp for tilstrekkelig stor n pga. avrunding

Enkel populasjonsdynamikk

Vanlig enkel lov for populasjonsvekst

$$y_{n+1} = \mu y_n$$

der n teller generasjoner el.
Løsning

$$y_n = \mu^n y_0$$

$\mu > 1 \Rightarrow y_n$ vokser over alle grenser
$\mu < 1 \Rightarrow$ populasjonen dør ut

For enkel modell som igorerer bla.a. begrensninger i tilgang på ressurser.

Ikkelineær modell

Negativ konsekvens av konkurranse antas proporsjonal med kvadratet poulasjonen

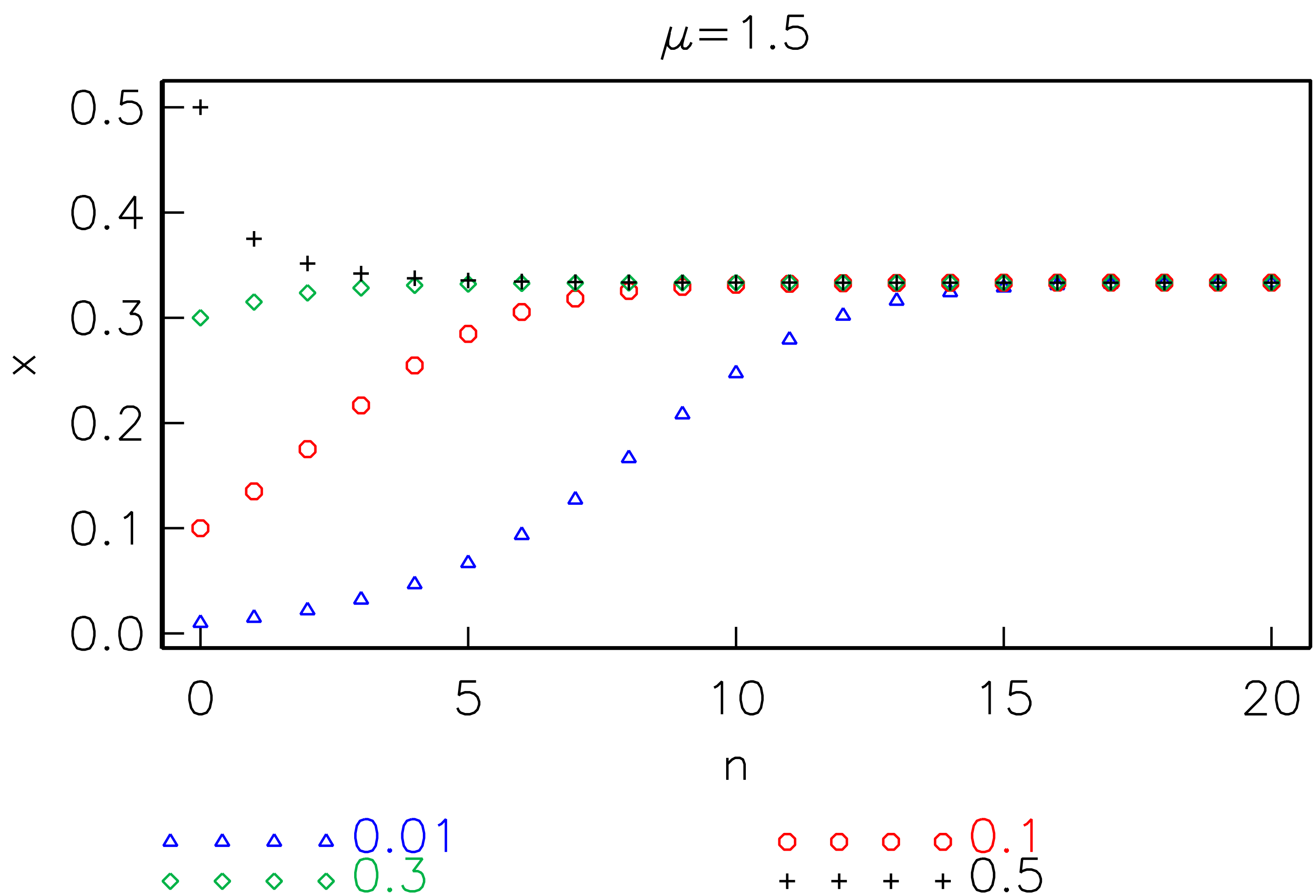
$$y_{n+1} = \mu y_n - B y_n^2$$

Bytte av variabel $y_n = \mu x_n / B$:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

Kan ikke løses i formel, men enkel å simulere
Interessante tilfeller $\mu > 1$.

$\mu = 1.5, \quad x_e = 1/3$



Kurver merket med x_0. Konvergens.

Likevektsløsning

Det synes som x_n har en grense, x_e, når $n \to \infty$.
Det finnes løsning $x_n = x_e$=konstant:

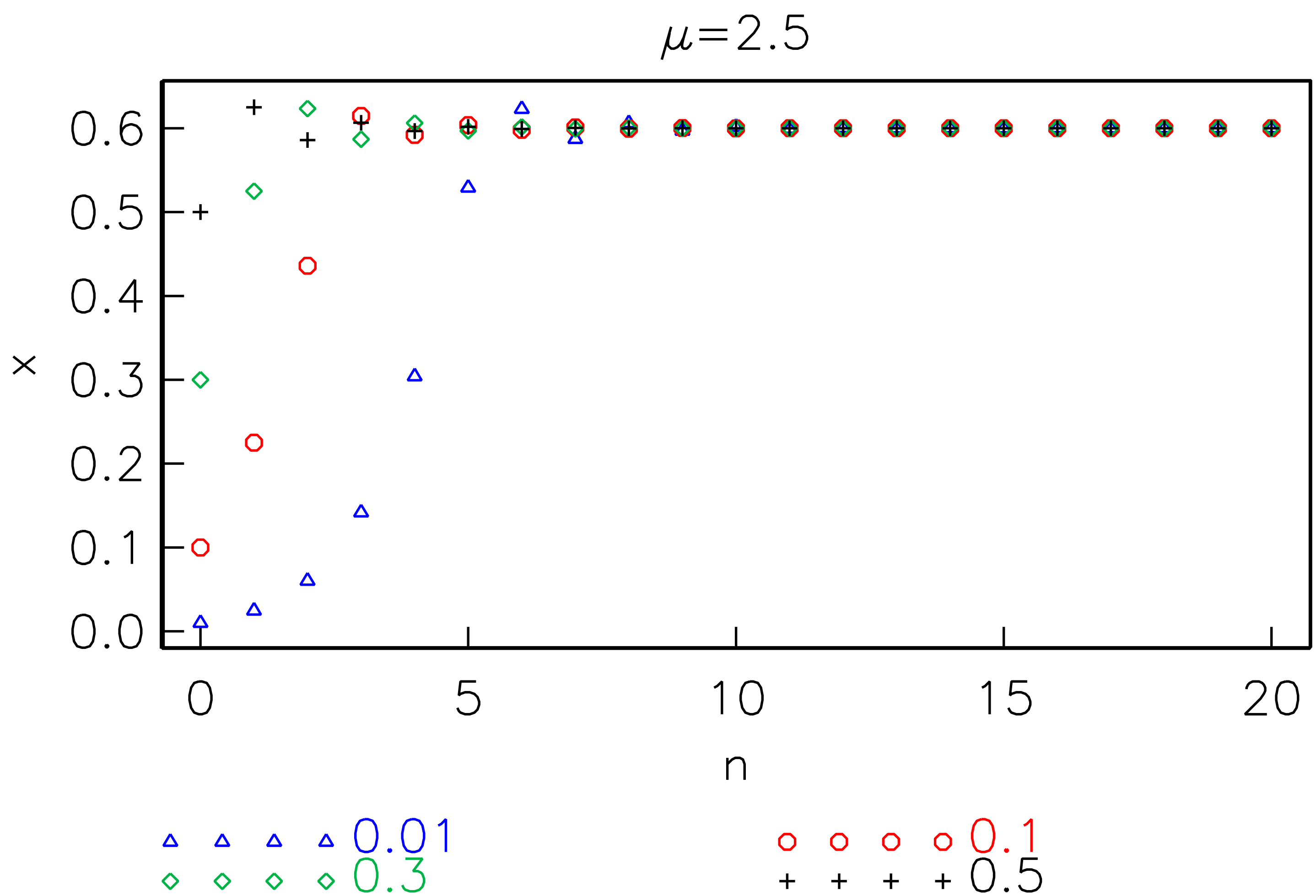
$$x_e = \mu x_e(1 - x_e)$$

som gir

$$x_e = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

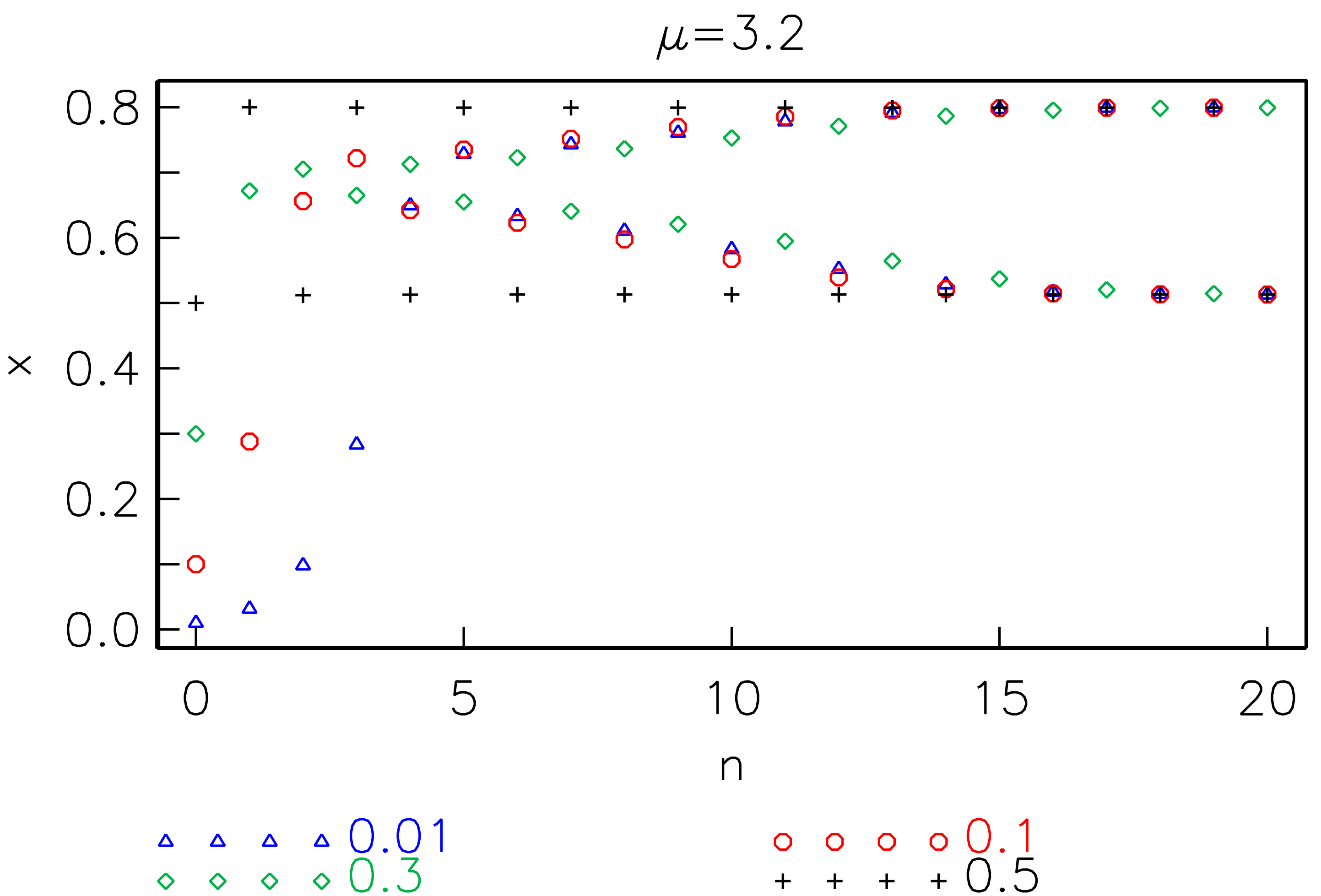
x_e er en likevektsløsning

$\mu = 2.5, \quad x_e = 0.6$



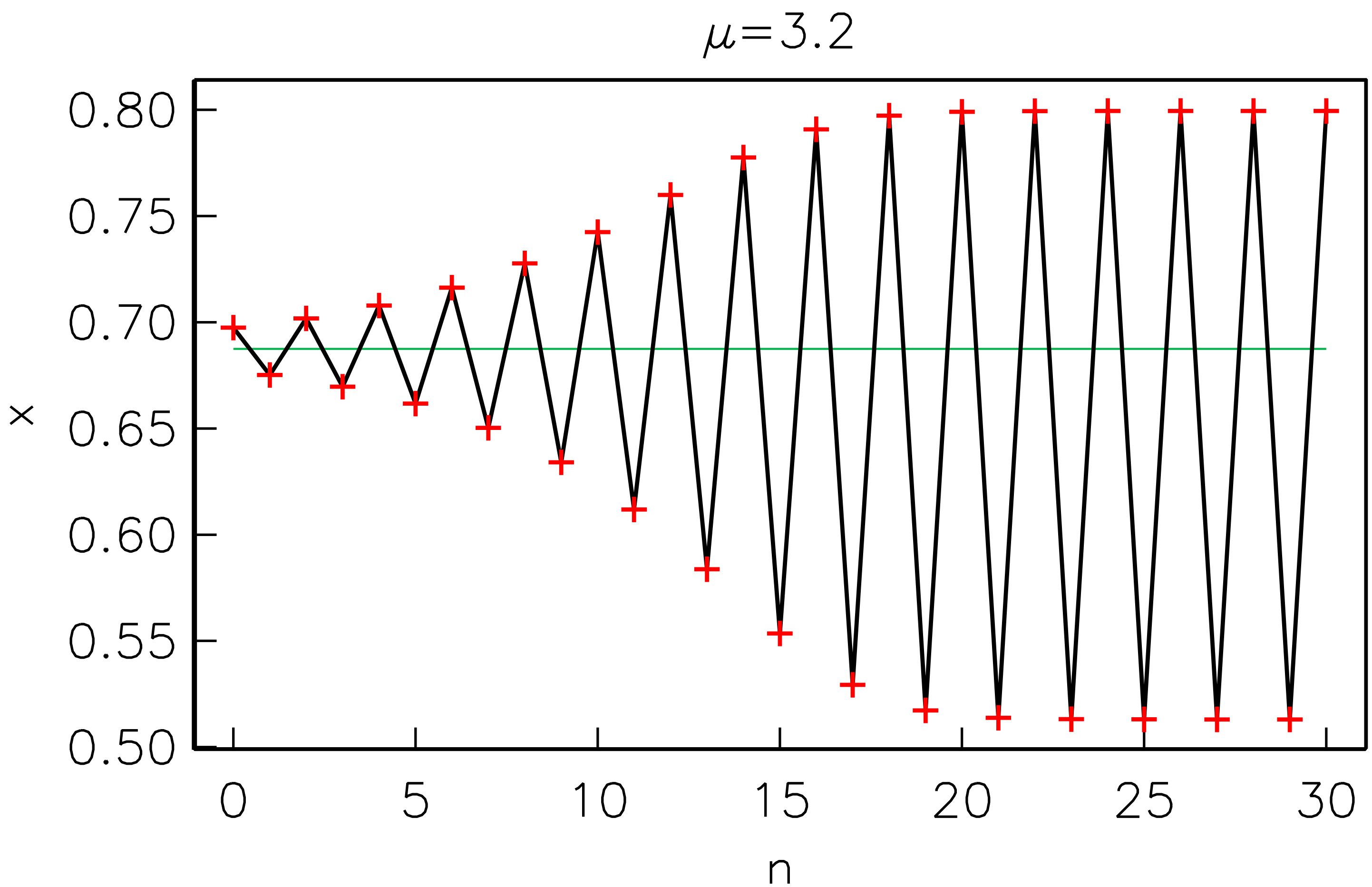
Stadig konvergens når $n \to \infty$.

$\mu = 3.2, \quad x_e = 0.69..$



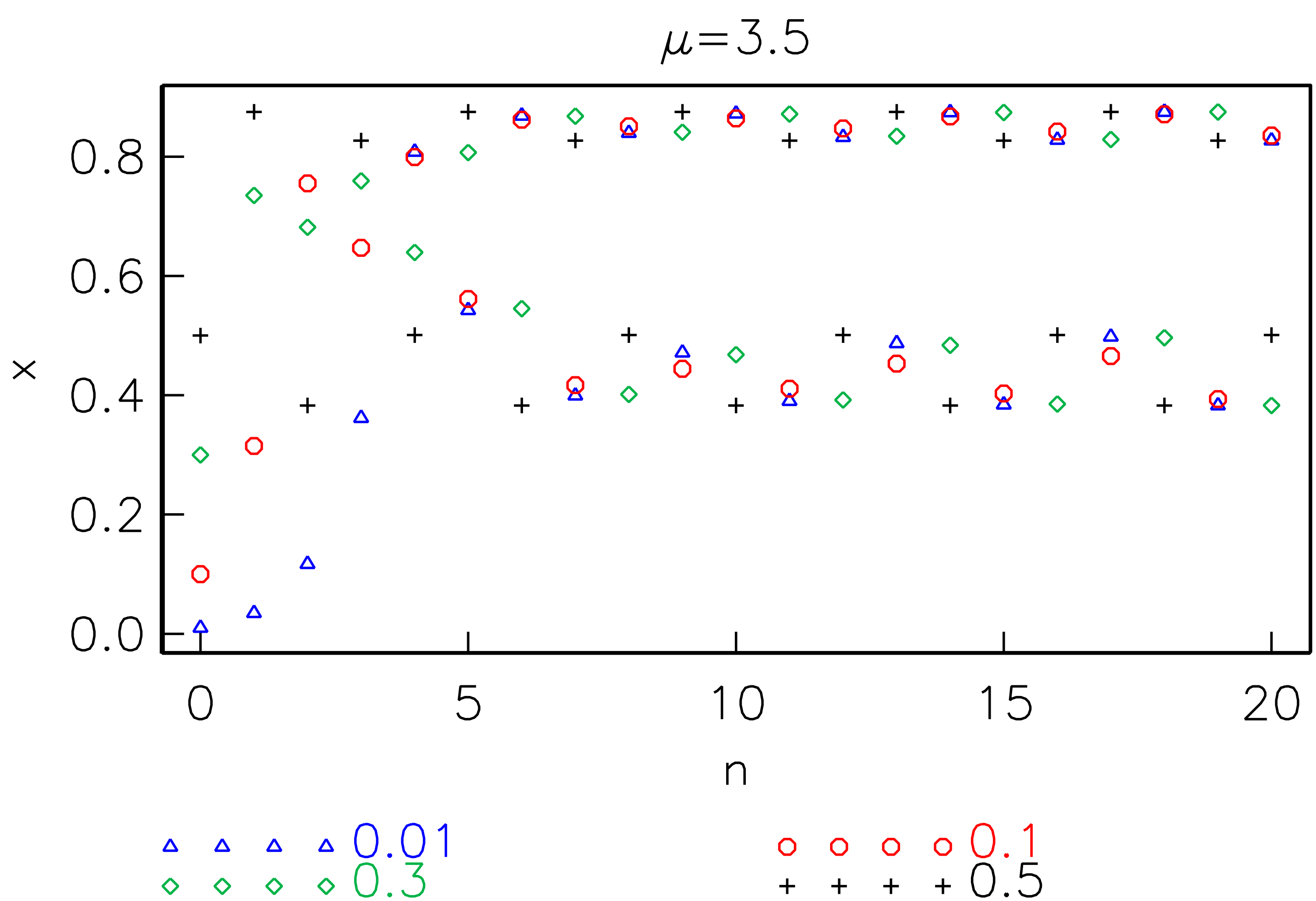
x_n nærmer seg 2-periodisk når $n \to \infty$.

$\mu = 3.2, \quad x_0 = x_e + 0.01$



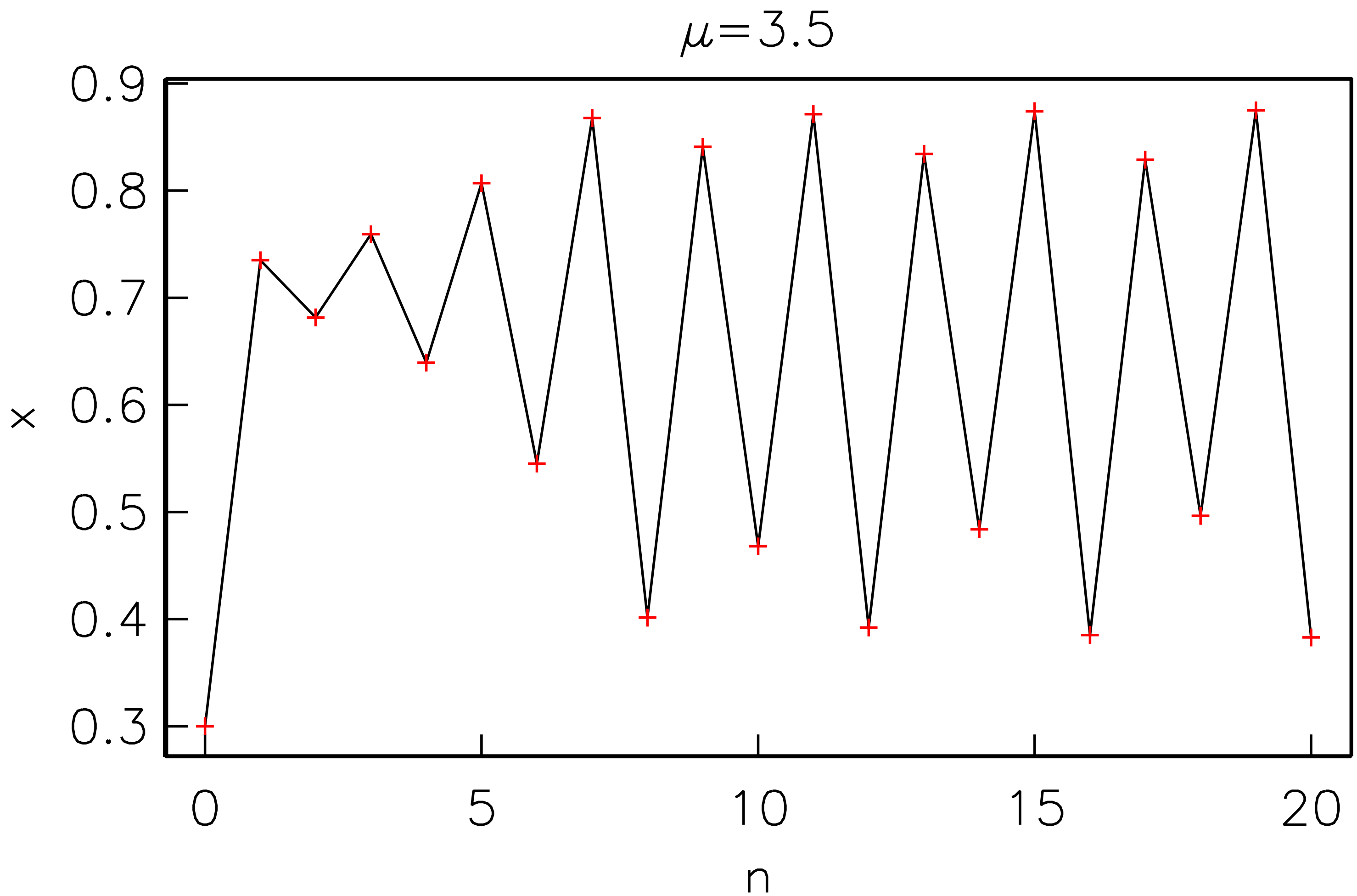
Likevekt er instabil, omstiller seg til periodisk løsning.
(Kan vise at dette gjelder for $\mu > 3$)

$\mu = 3.5, \quad x_e = 0.71..$



Større perioder når $n \to \infty$.

$\mu = 3.5, \quad x_e = 0.71..$



$x_0 = 0.3.$

Bemerkninger

Simuleringer antyder

- Likevekt instiller seg for små μ
- Likevekt instabil for større $\mu \Rightarrow$ periodisk løsning instiller seg
- Mer komplekst bilde med økende μ

Kunne gjort teori for

- Stabilitet av likvekt
- Forklaring (matematisk) av de periodiske løsningen
- ...

Enkelt eksempel på utvikling mot kaos (se slutten av kap. 4 i Kalkulus)