Løsningsforslag

Prøveeksamen i MAT-INF 1100, Høsten 2003

Denne prøveeksamenen har samme format som den "virkelige" eksamenen, og inneholder oppgaver av samme type og vanskelighetsgrad. Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare et riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Kalkulator er eneste tillatte hjelpemiddel på eksamen. Formelarket vil bli delt ut sammen med oppgavesettet.

Om løsningsforslaget: Jeg har ikke vist detaljer i alle flervalgsoppgavene, om det er noe du savner så send meg en e-post. Vær som vanlig på vakt mot trykkfeil!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = e^{-x}$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/6$ ☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/3$
☐ $1 - x - x^2/2 - x^3/6$ ☑ $1 - x + x^2/2 - x^3/6$
☐ $1 - x + x^2/2 - x^3/3$

Løsning. Følg oppskriften på Taylorpolynomer.

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \arctan x$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x^2/2$ ☑ $x - x^3/3$ ☐ $1 + x/2 + x^2/3 + x^3/4$
☐ $x - x^3/6$ ☐ $x + x^3/6$

Løsning. Husk at $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ og bruk oppskriften.

Oppgave 3. Koeffisienten foran x^3 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = \int_0^x e^{\sin u}\,du$ om punktet $a = 0$ er

☐ 1 ☐ 0 ☐ 1/3 ☐ −1/3 ☑ 1/6

Løsning. Den deriverte til f er gitt ved $f'(x) = e^{\sin x}$. Fra denne formelen kan vi finne de høyere deriverte til f. Resultatet er $f'''(x) = e^{\sin x}\big(\cos(x^2) - \sin x\big)$.

Oppgave 4. Bernsteinpolynomet $b_{i,n}(x) = \binom{n}{i}(1-x)^i x^{n-i}$, der $0 \le i \le n$ og $n \ge 0$ har egenskapen

- [x] $b_{i,n}(x) \le 1$ for alle $x \in [0,1]$
- [ ] $b_{i,n}(0) = 1/2$
- [ ] $b_{i,n}(x) \le 0.1$ for alle $x \in [0,1]$
- [ ] $b_{i,n}(1) = 1/2$
- [ ] $b_{i,n}(x) \le 2$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Løsning. Vi vet fra kapittel 9 i kompendiet at $\sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(x) = 1$ og at $b_{i,n}(x) \ge 0$ for $x \in [0,1]$. Men hvis en sum av ikke-negative tall summerer seg opp til 1 kan ikke noen av tallene være større enn 1, altså er (a) riktig.

Oppgave 5. Differensialligningen $y' + y = x$ har løsningen

- [ ] $y(x) = 1 + Cx$
- [x] $y(x) = -1 + x + Ce^{-x}$
- [ ] $y(x) = x + Cx^2/2$
- [ ] $y(x) = x + Ce^{-x}$
- [ ] $y(x) = x^2/2 + Ce^{x}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Løsning. Løses med teknikken i seksjon 10.1.

Oppgave 6. Differensialligningen $y' + y/x = x^3$ med initialverdi $y(1) = 1$ har løsningen

- [x] $y(x) = x^4/5 + 4/(5x)$
- [ ] $y(x) = x^4$
- [ ] $y(x) = x^2/2 + 1/(2x)$
- [ ] $y(x) = x$
- [ ] $y(x) = 1/x$

Løsning. Løses med teknikken i seksjon 10.1.

Oppgave 7. Differensialligningen $y' - 2xy^{-1/2} = 0$ har den generelle løsningen

- [ ] $y(x) = \sqrt{x + C}$
- [ ] $y(x) = x + C$
- [x] $y(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(x^2 + C)^{2/3}$
- [ ] $y(x) = (x^3 + C)^{1/3}$
- [ ] $y(x) = e^{x+C}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Løsning. Siden ligningen kan skrives $y'y^{1/2} = 2x$ kan den løses ved separasjon av variable. Vi får

$$\frac{2}{3}y^{3/2} = \int y^{1/2}\,dy = \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Vi løser med hensyn på y og får

$$y(x) = \left(\frac{3}{2}(x^2 + C)\right)^{2/3}.$$

Oppgave 8. Differensialligningen $y''+3y'+2y=0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = \cos x$ ☐ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

☑ $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ ☐ $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

☐ $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$

der C_1 og C_2 er vilkårlige, reelle tall.

Løsning. Den karakteristiske ligningen er $z^2 + 3z + 2 = 0$ som har røtter $r_1 = -2$ og $r_2 = -1$. Dermed er alternativ 3 riktig.

Oppgave 9. Differensialligningen $y''+2y'+10y=0$ med initialverdier $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ har løsningen

☐ $y(x) = 3x$ ☐ $y(x) = 3e^x - 3$ ☑ $y(x) = e^{-x}\sin(3x)$

☐ $y(x) = e^x \cos(3x)$ ☐ $y(x) = e^x$

Løsning. Den karakteristiske ligningen er $z^2 + 2z + 10 = 0$ som har røtter $r_1 = -1 - 3i$ og $r_2 = -1 + 3i$. Dermed er den generelle løsningen

$$y(x) = e^{-x}\big(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)\big)$$

og den deriverte er

$$y'(x) = -e^{-x}\big(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)\big) + 3e^{-x}\big(C_1 \cos(3x) - C_2 \sin(3x)\big).$$

Initialverdiene gir ligningene $0 = y(0) = C_2$ og $3 = y'(0) = -C_2 + 3C_1$ som har løsningen $C_1 = 1$ og $C_2 = 0$. Dermed er alternativ 3 riktig.

Oppgave 10. Differensialligningen $y' = y\cos x$ med initialverdi $y(0) = 1$ har løsningen

☑ $y(x) = e^{\sin x}$ ☐ $y(x) = x$ ☐ $y(x) = \cos x$ ☐ $y(x) = e^x$

☐ $y(x) = e^{-x}$

Løsning. Ligningen er separabel og kan skrives som $y'/y = \cos x$. Dermed får vi

$$\ln|y| = \sin x + C$$

som gir

$$y(x) = De^{\sin x}.$$

Initialverdien gir $D = 1$ så alternativ 1 er riktig.

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere Taylorpolynomene til logaritmefunksjonen om punktet $a = 1$.

a) Bestem Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \ln x$ om punktet $a = 1$ og bruk dette til å regne ut en tilnærming til $\ln 1.1$.

Løsning. Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x, & f(1) &= 0, \\ f'(x) &= 1/x, & f'(1) &= 1, \\ f''(x) &= -1/x^2, & f''(1) &= -1, \\ f'''(x) &= 2/x^3, & f'''(1) &= 2. \end{aligned}$$

Vi får dermed

$$\begin{aligned} T_3 f(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)^2 f''(1)/2 + (x-1)^3 f'''(1)/6 \\ &= (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 \end{aligned}$$

og $T_3 f(1.1) = 0.1 - 0.1^2/2 + 0.1^3/3 = 0.0953333$.

b) La $T_n f(x)$ betegne Taylorpolynomet til f av grad n om $a = 1$, og la $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ betegne restleddet. Vis at restleddet kan skrives som

$$R_n f(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} c^{-n-1},$$

der c er et tall i intervallet $(1, x)$.

Vi ønsker å bruke $T_n f$ til å regne ut en tilnærmet verdi av $\ln 1.1$. Finn en verdi av n slik at feilen garantert er mindre enn 10^{-10} i tallverdi.

Hint: Her kan du få bruk for Lagranges versjon av restleddet som sier at om vi Taylorutvikler om a så kan feilleddet skrives som

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Her er c er et tall i intervallet (a, x)

Løsning. For å finne $R_n f(x)$ trenger vi et generelt uttrykk for den deriverte til f. Det lønner seg å skrive $f'(x) = x^{-1}$. Vi finner da $f''(x) = -x^{-2}$ og $f'''(x) = 2x^{-3}$ slik som over. Den generelle formelen ser vi blir $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ (formelt sett bør dette vises ved induksjon, men det er ikke nødvendig for en såpass opplagt formel). Setter vi inn dette i formelen for restleddet med $a = 1$ får vi

$$R_n f(x) = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n n!\, c^{-(n+1))} = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} c^{-n-1}$$

der c er et tall mellom 1 og x.

Setter vi $x = 1.1$ blir dette

$$R_n f(1.1) = (-1)^n \frac{(1.1-1)^{n+1}}{n+1} c^{-n-1}$$

der c er et tall mellom 1 og 1.1. På intervallet $[1, 1.1]$ er funksjonen c^{-n-1} størst i $c = 1$ slik at vi har

$$\left|R_n f(1.1)\right| \leq \frac{0.1^{n+1}}{n+1}.$$

Feilen vil bli mindre enn 10^{-10} om høyresiden i denne ulikheten er mindre enn 10^{-10}. Det oppnår vi om $0.1^{n+1}/(n+1) < 10^{-10}$. Vi ser at dette vil skje for første gang når $n = 9$.

Oppgave 2. Finn den løsningen av differensialligningen

$$y'' + 2y' + 2y = x$$

som tilfredstiller inititialverdiene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Løsning. Vi finner først den generelle løsningen y_h til den homogene ligningen. Den karakteristiske ligningen er $z^2+2z+2 = 0$ som har røttene $r_1 = -1-i$ og $-1+i$ så vi har

$$y_h(x) = e^{-x}(C\cos x + D\sin x).$$

For å finne en partikulær løsning prøver vi med en løsning på samme form som høyre siden, $y_p(x) = A + Bx$. Da er $y_p'(x) = B$ og $y_p''(x) = 0$. Setter vi dette inn i ligninen får vi

$$x = y_p'' + 2y_p' + 2y_p = 2B + 2A + 2Bx.$$

Skal denne ligningen holde for alle x må vi ha $2A + 2B = 0$ og $2B = 1$. Vi har derfor $A = -1/2$ og $B = 1/2$. Dermed er $y_p(x) = (x-1)/2$ en partikulær løsning. Den generelle løsningen av ligningen er derfor

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x-1}{2} + e^{-x}(C\cos x + D\sin x).$$

Initialverdiene gir

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= -\frac{1}{2} + C, \\ 0 = y'(0) &= \frac{1}{2} - C + D \end{aligned}$$

som gir $C = 3/2$ og $D = 1$. Løsningen er dermed

$$y(x) = \frac{1}{2}\big(x - 1 + e^{-x}(3\cos x + 2\sin x)\big).$$

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi studere en modell for sparing.

a) Du har bestemt deg for å spare og ønsker å ha kr. 300 000 tilgjengelig etter 10 år. Du begynner sparingen ved å sette et beløp b i banken til en årlig fastrente på 5% ved begynnelsen av et år. Renten utbetales ved utgangen av hvert år. I tillegg sparer du et beløp på s kroner hvert år som settes inn på kontoen ved utgangen av året.
Forklar hvorfor beløpet x_n som du har i banken etter n år er gitt ved

$$x_n = 1.05\,x_{n-1} + s, \quad x_0 = b.$$

Hvis $s = 18\,000$ kroner, hvor stor må da b være for at du skal ha 300 000 kroner etter 10 år?

Løsning. Ved inngangen til et år n har vi x_{n-1} kroner i banken. Med 5% rente øker dette til $1.05x_{n-1}$ ved neste årsskifte. I tillegg setter vi inn s kroner og har dermed $x_n = 1.05x_{n-1} + s$ i banken ved årsskiftet. Dessuten starter vi med b kroner så $x_0 = b$.
For å løse ligningen så observerer vi at den homogene ligningen $x_n = 1.05x_{n-1}$ har løsningen $x_n^h = C\,1.05^n$. For å finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen prøver vi med $x_n^p = A$. Det gir

$$A = 1.05A + s$$

så $A = -s/0.05 = -20s$. Den generelle løsningen til ligningen er dermed

$$x_n = x_n^p + x_n^h = -20s + C1.05^n.$$

Initialverdien $x_0 = b$ gir

$$b = x_0 = -20s + C$$

så $C = b + 20s$. Løsningen er dermed

$$x_n = -20s + (b + 20s)1.05^n. \qquad (1)$$

Nå er $s = 18000$ og vi ønsker at $x_{10} = 300000$. Dermed må vi ha

$$300000 = x_{10} = -360000 + (b + 360000)1.05^{10}.$$

Dette gir $b = 660000/1.05^{10} - 360000 \approx 45183$.

b) Du vurderer andre sparestrategier og ønsker at beløpet b som du begynner sparingen med skal være lik det årlige sparebeløpet s. Hvor mye må du nå spare hvert år for å ha 300 000 kroner etter 10 år?

Løsning. Løsningen (1) gjelder fremdeles. Hvis vi setter $b = s$ får vi $x_n = -20s + 21s\,1.05^n$. Med $x_{10} = 300000$ gir dette

$$s = \frac{300000}{21 \cdot 1.05^{10} - 20} \approx 21117.$$

c) Du regner med en prisstigning på 3 % pr. år og mener du bør ha råd til å la det årlige sparebeløpet øke på samme måte som prisstigningen. Forklar hvorfor beløpet y_n du nå har etter n år er gitt ved

$$y_n = 1.05\,y_{n-1} + 1.03^n s.$$

Hvis $s = 18\,000$ kroner som i (a), hvor mye må nå startkapitalen b være for at du skal ha 300 000 kroner etter 10 år?

Løsning. Med 3% prisstigning blir s til $1.03s$ etter et år, til $1.03(1.03s) = 1.03^2 s$ etter to år. Det n'te året skal vi derfor betale inn $1.03^n s$ kroner. Resten av modellen er som før.
For å finne nødvendig startkapital nå må vi løse den nye differensligningen. Den homogene ligningen er den samme, men vi må finne en ny partikulær løsning. På grunn av leddet $1.03^n s$ forsøker vi med en løsning på formen $y_n^p = A\,1.03^n$. Setter vi inn i ligningen får vi

$$A\,1.03^n = 1.05 \cdot 1.03^{n-1} A + 1.03^n s$$

eller

$$1.03A = 1.05A + 1.03s$$

så $A = -1.03s/0.02 = -51.5s = -927000$. Den generelle løsningen av ligningen er derfor nå

$$y_n = -927000 \cdot 1.03^n + C\,1.05^n.$$

Initialverdien $y_0 = b$ gir

$$b = y_0 = -927000 + C$$

eller $C = b + 927000$ slik at kapitalen utvikler seg som

$$y_n = -927000 \cdot 1.03^n + (b + 927000)1.05^n.$$

Hvis y_{10} skal være 300000 får vi en ligning for b,

$$300000 = -927000 \cdot 1.03^{10} + (b + 927000)1.05^{10}.$$

Løser vi denne får vi $b = (300000 + 927000 \cdot 1.03^{10})/1.05^{10} - 927000 \approx 21994$.

Oppgave 4. En følge er gitt ved differensligningen $x_n = x_{n-1}/2 + (n+1)/n$ for $n \geq 1$, der $x_0 = 2$. Vis ved induksjon at $2 \leq x_n \leq 3$ for alle heltall $n \geq 0$.

Løsning. Hvis vi regner ut noen av verdiene får vi $x_0 = 2$, $x_1 = x_2 = 3$, $x_4 = 17/6 \approx 2.8333$, $x_5 = 8/3 \approx= 2.6667$. Resultatet ser altså ut til å holde.
Vi viser først at $x_n \geq 2$. Dette er åpenbart sant for $n = 0$. Anta så at vi har vist at $x_k \geq 2$, vi må vise at $x_{k+1} \geq 2$ der k er et vilkårlig naturlig tall. Vi har

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{k+2}{k+1} > 1 + 1 = 2.$$

Her har vi brukt antagelsen om at $x_k > 2$ og at uttrykket $(k+2)/(k+1)$ alltid er større enn 1 når k er positiv.
Beviset for $x_n < 3$ går på samme måte. Det er åpenbart sant for $n = 0$. Anta derfor at $x_k \leq 3$, vi må vise at da er også $x_{k+1} \leq 3$ der k er et vilkårlig naturlig tall. Vi ser at

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{k+2}{k+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

Her har vi brukt antagelsen $x_k \leq 3$ og at uttrykket $(k+2)/(k+1)$ avtar med k og derfor er størst for $k = 1$ (da har det verdien 3/2).