Matematikk sett ovenfra

Knut Mørken

22. november 2004

Er MAT-INF 1100 et matematikkurs, er det et programmeringskurs, begge deler eller ingen av delene? Etter samtaler med en del studenter vet jeg at noen har problemer med å plassere dette kurset, og dette notatet er et forsøk på å bidra til en avklaring av dette.

1 Hvilke ingredienser har matematikken?

For å kunne si noe om hva MAT-INF 1100 er må vi først ha så noenlunde klart for oss hva matematikk er. For en stor del av Norges befolkning vil sannsynligvis ordet 'matematikk' være mer eller mindre synonymt med 'gangetabellen' og andre mekaniske regneregler de lærte på skolen. De som også har hatt en del matematikk på videregående skole vil nok rynke litt på nesa av dette og legge til begreper som ligninger, sinus og cosinus, derivasjon, integrasjon også videre. Spør du litt nærmere hva derivasjon er vil nok mange fokusere på regnereglene som gjelder for den deriverte. De som har lengre matematikkstudier bak seg vil nok fremdeles rynke litt på nesa, men begrepene over får fram en viktig fasett av hva matematikk er, nemlig beregninger med tall og symboler. En stor del av matematikkundervisningen i grunnskolen er fokusert mot det å lære å beherske de fire regneartene, og i ungdomsskolen generaliseres dette til algebra — regning med bokstaver. På videregående skole kommer funksjonsbegrepet inn, men fremdeles er beregninger (med symboler) sentralt, slik som i de ulike regnereglene for polynomer, trigonometriske-, eksponensial- og logaritmefunksjoner, reglene for derivasjon og integrasjon og lignende. Som en oppsummering av dette kan vi si at en viktig del av matematikken er *beregninger*, både med tall og symboler.

En annen ingrediens som vi kjenner igjen fra skolen er tekstoppgavene. Her er poenget å bruke matematikken til å løse praktiske problemer. Vi anvender altså matematikken på et problem som i og for seg ikke har noe spesielt med matematikk å gjøre, men det viser seg at en stor klasse av mer eller mindre dagligdagse problemer kan oversettes til matematikk, ofte i form av en eller flere ligninger. Ved å gjøre en matematisk beregning kan vi løse matematikkproblemet (ligningene), og derved også få et svar på vårt opprinnelige problem. Matematikk har med andre ord en grenseflate mot resten av vår begrepsverden, og for mange (de fleste?) er det dette som er motivasjonen for å lære seg matematikk, det er matematikkens *anvendelser*. Den største utfordringen når matematikken skal anvendes på et problem, er nettopp oversetterprosessen fra en mer eller mindre vag problembeskrivelse i form av en tekst til en matematisk modell av problemet. Transformasjonen fra uoppstilt problem til modell skal vi referere til som *modellering*.

Matematikken har en viktig ingrediens til som ofte kommer i bakgrunnen og ikke fokuseres i matematikkundervisningen i skolen. Hvorfor må vi passe på menten når vi summerer tall, hvorfor gir den vanlige multiplikasjonsmetoden riktig svar, hvor kommer metoden for langdivisjon fra, hvorfor er den deriverte til $\sin x$ det samme som $\cos x$ også videre? Dette er det teoretiske grunnlaget for våre beregninger og gir forklaring på hvorfor våre regnemetoder gir rett svar. I matematikk er det mulig å *bevise* at ting er riktig, og når noe er bevist i matematikk vil det alltid være riktig. Det betyr at så sant ingen har gjort en logisk feil, vil en matematisk teori for alltid bli stående som riktig, og beregningsmetodene som er utledet fra teorien vil alltid gi riktig svar om de utføres på riktig måte. En viktig del av matematikken er altså det *teoretiske grunnlaget*.

For å oppsummere kan vi si at vi har identifisert tre hovedingredienser i matematikk:

1. Teoretisk grunnlag
2. Metoder
3. Anvendelser

Med metoder mener vi altså beregningsmetoder som kan utføres i henhold til en klar oppskrift.

Det må understrekes at denne oppdelingen hverken er presis eller objektiv; det fins deler av matematikken som både kan betraktes som en del av det teoretiske grunnlaget og en metode, og oppfatningen av hva som er anvendelser vil også variere. Allikevel vil en slik oppdeling kunne være et nyttig mentalt rammeverk å plassere nyervervet matematikkunnskap inn i.

2 Beregninger

Før vi går i gang med å plassere matematikken vi gjennomgår i MAT 1100 og MAT-INF 1100 i henhold til kategoriene over, skal vi se litt mer på det vi har kalt metoder. Som nevnt over er dette de presise, men mekaniske oppskriftene mange forbinder med matematikk. De som arbeider med matematikk vil nok være enige om at det er det teoretiske grunnlaget og eventuelt utviklingen av nye beregningsmetoder for å løse nye problemer som er mest spennende, men uansett er beregningene viktige. I tidligere tider brukte matematikerne store deler av sin tid på praktiske beregninger, og for å spare tid var det viktig å finne fram til effektive metoder. Resultatet er en lang rekke av metoder for å beregne ulike matematiske størrelser, for eksempel metoder for å løse ligninger og metoder for å beregne integraler. Disse metodene ble naturlig nok tilpasset maskinen som skulle utføre dem, nemlig mennesket, utstyrt med papir og blyant.

Et flott eksempel er integralregningen. Problemet kan formuleres som det å finne arealet under grafen til en funksjon f definert på et intervall $[a, b]$ (historisk var problemstillingen mye mer konkret, som det å finne den tilbakelagte veien til et objekt når dets hastighet var kjent ved hvert tidspunkt). Når funksjonen er konstant eller en rett linje, er det lett å regne ut arealet, men for mer generelle funksjoner er det slett ikke opplagt hvordan dette kan gjøres. Tanken om å dele opp intervallet, og derved arealet, i mindre biter og så addere disse arealene er en naturlig tilnærming til problemet. Problemet med denne framgangsmåten er at vi som regel må dele opp i bittesmå biter for å få en rimelig grad av nøyaktighet. Dette betyr at beregningene blir svært tidkrevende når de skal gjennomføres med papir og blyant. Nettopp dette var problemet Newton sto overfor på 1600-tallet. Hans store oppdagelse var sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon, noe som reduserer det å summere opp bidragene fra alle de små arealbitene til det å finne en funksjon F som har f som derivert og så regne ut differansen $F(b) - F(a)$. Dette var ikke mindre enn fantastisk med tanke på hva Newton og hans samtidige hadde av verktøy for å gjøre beregninger: En lang og tidkrevende addisjon av tall ble redusert til en kort manipulasjon av symboler, og papir og penn rekker langt som verktøy.

Matematikere har utviklet mange andre metoder for å forenkle og effektivisere beregninger som ellers ville være mer eller mindre umulige å gjennomføre. Felles for de aller fleste av metodene utviklet før 1940 (og også mange av metodene som har blitt utviklet siden) er at de er tilpasset det samme verktøyet, nemlig papir og penn. Disse verktøyene har vist seg utrolig slagkraftige og har vært med å legge grunnlaget for mye av det vi omgir oss med av hjelpemidler i vårt moderne samfunn.

Hva var det som skjedde i 1940 som påvirket utviklingen av matematiske beregningsmetoder? Det var selvsagt utviklingen av de første datamaskinene. I begynnelsen hadde maskinene beskjeden regnekapasitet, og problemene som ble forsøkt løst var også beskjedne, i allefall etter dagens målestokk. Når man skulle velge beregningsmetode var det mest naturlige å bruke de kjente metodene som allerede var utviklet for regning med penn og papir. Men etterhvert som maskinene ble kraftigere ble det klart at de kunne utnyttes enda bedre ved å utvikle skreddersydde beregningsmetoder som utnyttet datamaskinens særegne egenskaper.

Det ovenstående illustrerer et universelt prinsipp: Våre arbeidsmetoder bør alltid tilpasses verktøyet vi bruker. Denne tilsynelatende opplagte sannheten har vi alle lett for å overse av den enkle grunn at vi ikke er særlig glad i å endre våre arbeidsmetoder. Konsekvensen av dette prinsippet for matematikk er: *På samme måte som de klassiske matematiske beregningsmetodene var tilpasset datidens verktøy (papir og penn) bør beregningsmetodene vi bruker på en datamaskin være tilpasset dette verktøyets egenart.*

Den mest utpregede egenskapen til en datamaskin er dens evne til slavisk og raskt å utføre en kjedelig regneoppskrift, noe som står i sterk kontrast til hva vi mennesker er i stand til å gjøre med papir og blyant. Utfordringen er derfor å utvikle beregningsmetoder som kan utnytte denne særegenheten ved datamaskiner. Hvis vi går tilbake til eksempelet med integrasjon, så ser vi dermed at dersom vi bruker en datamaskin, er det helt greit å beregne integraler ved å summere opp arealet av mange små rektangler, akkurat slik som definisjonen av integralet foreskriver. Dette har dessuten den fordelen at vi ikke er begrenset til å finne integralet av funksjoner som har en antiderivert.

For å kunne utnytte datamaskinen som et effektivt verktøy, må vi vite litt om dens egenart og lære litt om hvordan beregninger bør formuleres for å kunne gjennomføres effektivt på datamaskiner. Siden beregninger må serveres for datamaskiner i form av programmer, bør derfor alle seriøse brukere av matematikk kjenne til de grunnleggende prinsippene for *programmering*. Dessuten bør en moderne opplæring i matematikk og naturvitenskap illustrere hvordan datamaskinen brukes som et verktøy av dagens forskere. Ikke fordi *alle* skal programmere datamaskiner i en framtidig jobb, men fordi datamaskinen er et av de viktigste verktøyene for de *aller fleste* profesjonelle aktører innen matematikk og naturvitenskap.

For å få et godt grunnlag for bruk av datamaskiner i matematiske beregninger, må vi kjenne til maskinens særegenheter, så som hvordan tall representeres og hvordan feil i beregninger kan påvirke resultatet. Det er også viktig med intuisjon, kunnskap og bevissthet om hva som er effektive og nøyaktige beregningsmetoder, slik at nye metoder som utvikles kan utnytte datamaskinen på en god måte.

Oppsummering. Beregninger står sentralt i matematikk, og utvikling av nye beregningsmetoder er viktig i mange sammenhenger. På grunn av sin regnekraft er datamaskinen i dag et helt sentralt beregningsverktøy for de fleste profesjonelle brukere av matematikk, og dette verktøyet gir helt andre muligheter for utforsking av matematiske modeller enn regning med papir og blyant. Grunnprinsippene for programmering og bruk av moderne matematikkverktøy på datamaskin er derfor en viktig ingrediens i en moderne matematikkutdanning. På bakgrunn av dette er det rimelig å nyansere vår kategorisering av matematikk til

1. Teoretisk grunnlag
2. Metoder
3. Programmering
4. Anvendelser

'Programmering' er her å anse som et underpunkt av 'Metoder'. I denne kategorien vil vi finne informasjon om en metode som er spesielt relevant når den skal programmeres på en datamaskin. Dette kan være detaljer om hvordan metoden bør kodes, effektivitet, feilanalyse og lignende. Det er verdt å legge merke til at for å komme fram til svar på slike spørsmål, må vi ofte ty til mer eller mindre avanserte matematiske teknikker eller kanskje til og med utvikle ny matematisk teori. Programmeringen kan altså sende oss tilbake til teorien!

3 Matematikken i MAT 1100 og MAT-INF 1100

La oss til slutt forsøke å fordele de ulike delene av pensum i MAT 1100 OG MAT-INF 1100 inn i de ulike kategoriene vi har nevnt over, nemlig teoretisk grunnlag, metoder, programmering og anvendelser. Legg merke til at vi behandler de to kursene som en helhet: De hører tett sammen og skal sammen gi en innføring i kalkulus og (numeriske) beregninger.

Under vil vi ta for oss de ulike matematiske temaene og fordele ingrediensene i henhold til oppdelingen over. Merk at det fins nærmest ubegrenset med anvendelser av matematikken som gjennomgås i MAT 1100 og MAT-INF 1100. Under har vi bare nevnt noen anvendelser som peker seg spesielt ut eller som vi har brukt ekstra tid på i undervisningen. Husk også at begrepet 'Metoder' rommer langt mer enn rene numeriske metoder. Derivasjonsreglene hører hjemme her og oppskriften for løsing av andreordens lineære differensligninger med konstante koeffisienter. *Utledningen* av disse metodene hører derimot hjemme i det teoretiske grunnlaget. Dette skillet mellom utledning av metoder og metodene i seg selv går igjen i kategoriseringen under.

Alle metoder har i og for seg en komponent under 'Programmering' som rommer det vi typisk må passe på når metoden skal programmeres. Etterhvert er dette ført med faste uttrykk som 'effektiv koding' og lignende.

For å skille stoffet i de to kursene, har vi markert stoff som hører hjemme i MAT 1100 med grå skrift.

3.1 Tall

Teoretisk grunnlag. Ulike tallsystemer, rasjonale og irrasjonale tall, kompletthet, beskrivelse av tall ved aksiomer, induksjonsprinsippet, komplekse tall.

Metoder. De fire regneartene, konvertering mellom tallsystemer.

Programmering. Representasjon av tall i datamaskinen, flyttall og avrundingsfeil.

Anvendelser. Alt du kan tenke på der tall spiller en rolle.

3.2 Følger av tall

Teoretisk grunnlag. Definisjon av følger, konvergens av følger (ϵ-δ), relasjoner mellom følger (differensligninger), utledning av løsningsprosedyrer for differensligninger, ulike former for divergens mot ∞ og ulike former for konvergens mot 0.

Metoder. Kokebok for å løse 2. ordens lineære differensligninger med konstante koeffisienter.

Programmering. Simulering av differensligninger, avrundingsfeil og stabilitet av løsning av differensligninger, generering av tilfeldige tall.

Anvendelser. Digitale lydsignaler, filtrering av lyd, tilfeldige tall.

3.3 Funksjoner: Definisjon og kontinuitet

Teoretisk grunnlag. Definisjon av kontinuitet, skjæringssetningen, ekstremverdisetningen, utledning av halveringsmetoden med feilanalyse.

Metoder. Regneregler for grenser, halveringsmetoden

Programmering. Plotting, halveringsmetoden.

Anvendelser. Plotting, nullpunkter for funksjoner.

3.4 Funksjoner: Derivasjon

Teoretisk grunnlag. Definisjon av deriverte, utledning av derivasjonsregler, utledning av metoder for numerisk derivasjon, definisjon og egenskaper ved kondisjonstall, utledning av L'Hoptals regel.

Metoder. Derivasjonsregler, L'Hopital's regel, numerisk derivasjon, kondisjonstall.

Programmering. Numerisk derivasjon.

Anvendelser. Alle mulige vekstrater, maks/min-problemer, kurvedrøfting.

3.5 Funksjoner: Integrasjon

Teoretisk grunnlag. Definisjon av integralet, etablering av integrasjonsregler (substitusjon, delvis integrasjon), utledning av metoder for numerisk integrasjon.

Metoder. Integrasjonsregler (ubestemte integraler, delvis integrasjon, substitusjon, numerisk integrasjon).

Programmering. Effektiv koding av trapesregelen og Simpsons formel.

Anvendelser. Arealer, volumer etc.

3.6 Funksjoner: Differensialligninger

Teoretisk grunnlag. Ulike typer av differensialligninger, utledning av løsningsmetoder (inklusive numeriske metoder).

Metoder. Løsningsmetoder (1. ordens lineære ligninger, separable ligninger, 2. ordens lineære ligninger med konstante koeffisienter).

Programmering. Effektiv koding av numeriske metoder så som Eulers metode og Eulers midtpunktmetode.

Anvendelser. Representasjon av naturlover som for eksempel Newtons andre lov.

3.7 Funksjoner: Approksimasjon

Teoretisk grunnlag. Utledning av Taylorpolynomer med restledd, interpolasjon, flerskalaanalyse, Newtons metode.

Metoder. Metodene som framkommer i det teoretiske grunnlaget.

Programmering. Effektiv koding av numeriske metoder, valg av god representasjonsform for polynomer.

Anvendelser. Kompresjon av lyd, representasjon av funksjoner og kurver i grafikk og plotting.

3.8 Funksjoner av to variable

Teoretisk grunnlag. Definisjon av funksjoner av to variable og grunnleggende begreper som kontinuitet, derivasjon og integrasjon. Utledning av betingelser for maks- og minpunkter.

Metoder. Metodene som framkommer i det teoretiske grunnlaget.

Programmering. Effektiv koding av numeriske metoder.

Anvendelser. Representasjon av bilder.