Løsningsforslag til noen ekstraoppgaver MAT-INF 1100 uke 48 (22/11-26/11)

Knut Mørken

22. november 2004

Oppgaver

Oppgave 1. a) En ensidig differenstilnærming til den deriverte kan skrives

$$f'(a) \approx \delta_e(f,h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Bruk Taylorpolynom med restledd til å vise at

$$\left|f'(a) - \delta_d(f,h)\right| \le \frac{1}{2} h \max_{[a,a+h]} \left|f''(x)\right|.$$

Løsning. Fra Taylors formel har vi

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi),$$

der ξ er et tall i intervallet $(a, a+h)$. Fra dette får vi

$$\left|f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| = \frac{h}{2}\left|f''(\xi)\right| \le \frac{h}{2} \max_{x\in[a,a+h]} \left|f''(x)\right|$$

som er det ønskede resultatet.

Legg merke til faktoren h på høyre side, det er denne som forsikrer oss om at vår tilnærming vil gi et godt resultat når h går mot 0. Vi skal se på andre metoder under der vi får en høyere potens av h, dette er fordelaktig siden vi da ikke trenger en så liten h for å få en god tilnærming.

Husk at feilen vi estimerer her er feilen i vår tilnærming. Avrundingsfeilen kommer i tillegg og denne vet vi vil øke når h avtar, men dette ser vi altså ikke på her.

b) En midtpunkttilnærming er gitt ved

$$f'(a) \approx \delta_m(f,h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Vis at

$$\bigl|f'(a) - \delta_m(f,h)\bigr| \leq \frac{1}{6}h^2 \max_{x\in[a-h,a+h]} \bigl|f'''(x)\bigr|.$$

Løsning. Vi har

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1), \tag{1}$$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2), \tag{2}$$

der ξ_1 er et tall i intervallet $(a, a+h)$ og ξ_2 er et tall i intervallet $(a-h, a)$. Trekker vi den første av disse ligningene fra den andre får vi

$$f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a) + \frac{h^3}{6}\bigl(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\bigr).$$

Dette gir

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{2h} - f'(a)\right| = \frac{h^2}{12}\bigl|f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\bigr| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x\in[a-h,a+h]} \bigl|f'''(x)\bigr|.$$

Denne symmetriske tilnærmingen til den deriverte gir altså større nøyaktighet (vi har faktoren h^2 i steden for h som vi hadde i (a)).

c) For den annenderiverte bruker vi ofte sammensatte differenser for den deriverte

$$f''(a) \approx \delta_m^2(f,h) = \frac{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h}}{h} \tag{3}$$

$$= \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}. \tag{4}$$

Finn et mål for feilen i dette tilfellet. Hvordan er følsomheten for avrundingsfeil i forhold til formlene for den førstederiverte?

Løsning. Vi bruker samme strategi som over, men denne gangen adderer vi de to uttrykkene og får

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + h^2 f''(a) + \frac{h^3}{6}\bigl(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\bigr).$$

Dette kan vi skrive som

$$\Big|\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}-f''(a)\Big| = \frac{h}{6}\big|f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\big|$$
$$\le \frac{h}{3}\max_{x\in[a-h,a+h]}\big|f'''(x)\big|.$$

Her er vi tilbake til en nøyaktighet på h, altså ikke så veldig bra.

Når det gjelder avrundingsfeil må vi forvente enda større problemer med denne formelen enn det vi har når vi skal estimere førstederiverte. Årsaken er kanskje lettest å se i (3). Beregning både av $f(a+h)-f(a)$ og $f(a)-f(a-h)$ vil være problematisk med tanke på avrundingsfeil når h er liten siden alle tre funksjonsverdiene vil være nokså like. Men de to estimatene for den førstederiverte i telleren i (3) vil også være ganske like slik at vi får en ny differanse mellom to nesten like store tall som også vil gi stor avrundingsfeil når h er liten. Vi får altså kanselleringseffekten som er så kritisk for avrundingsfeil to ganger.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi utlede noen numeriske integrasjonsformler med tilhørende feilestimater. Vi skal bare se på et enkelt delintervall og ikke summere opp bidragene slik som i trapesformelen og Simpsons formel.

a) Vi tilnærmer integralet med det innskrevne rektangelet der vi tilnærmer $f(x)$ med den konstante verdien $f(a)$. Bruk Taylorpolynomer til å vise at

$$\Big|\int_a^{a+h} f(x)\,dx - hf(a)\Big| \le \frac{1}{2}\,h^2 \max_{x\in[a,a+h]}\big|f'(x)\big|.$$

Løsning. Vi gjør en Taylorutvikling av $f(x)$ om a og får

$$\begin{aligned}E = \int_a^{a+h} f(x)\,dx - hf(a) &= \int_a^{a+h}\big(f(a)+(x-a)f'(\xi)\big)\,dx - hf(a)\\ &= hf(a) + \int_a^{a+h}(x-a)f'(\xi)\,dx - hf(a)\\ &= h\int_a^{a+h}(x-a)f'(\xi)\,dx,\end{aligned}$$

der ξ er et tall i $(a,a+h)$. Feilen $|E|$ er derfor begrenset av

$$\begin{aligned}|E| = \Big|\int_a^{a+h}(x-a)f'(\xi)\,dx\Big| &\le \int_a^{a+h}\big|(x-a)f(\xi)\big|\,dx\\ &\le \int_a^{a+h}(x-a)\,dx \max_{x\in[a,a+h]}\big|f(x)\big|\\ &= \frac{h^2}{2}\max_{x\in[a,a+h]}\big|f(x)\big|.\end{aligned}$$

Feilen går mot 0 med h^2, noe som er overraskende siden vi bare bruker et punkt.

b) Vi skal nå finne en tilnærming til integralet på intervallet $[a-h, a+h]$. Finn en α i intervallet $[0,1]$ slik at tilnærmingen

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx \approx I_g = h\bigl(f(a-\alpha h) + f(a+\alpha h)\bigr)$$

er eksakt (gir feil 0) for funksjonene $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$.

Løsning. Integrasjonsformler som denne kalles Gausskvadratur, og er kjent for sin store nøyaktighet ved bruk av få punkter. Formelen vi ser på her er basert på to punkter, men en kan lage lignende formler basert på flere punkter.

Det kan være greit å skrive $I_g = I_g(f)$ når funksjonen vi skal integrere er f. Vi skal altså bestemme α slik at $I_g(f) = \int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx$ når $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$. La oss først prøve med $f(x) = 1$. Da er

$$\int_{a-h}^{a+h} 1 \cdot dx = 2h, \quad I_g(1) = h\bigl(f(a-\alpha h) + f(a+\alpha h)\bigr) = 2h,$$

så tilnærmingen er uten videre eksakt i dette tilfellet.

Vi prøver deretter med $f(x) = x$. Da får vi

$$\int_{a-h}^{a+h} x\,dx = \Bigl[\frac{x^2}{2}\Bigr]_{a-h}^{a+h} = \frac{1}{2}\bigl((a+h)^2 - (a-h)^2\bigr) = 2ah,$$
$$I_g(x) = h\bigl(f(a-\alpha h) + f(a+\alpha h)\bigr) = h(a - \alpha h + a + \alpha h) = 2ah,$$

så formelen I_g er eksakt også i dette tilfellet, uavhengig av hvordan α velges.

Neste tilfelle er $f(x) = x^2$. Da er

$$\int_{a-h}^{a+h} x^2\,dx = \Bigl[\frac{x^3}{3}\Bigr]_{a-h}^{a+h} = \frac{1}{3}\bigl((a+h)^3 - (a-h)^3\bigr) = 2h(a^2 + h^2/3),$$
$$I_g(x^2) = h\bigl((a-\alpha h)^2 + (a+\alpha h)^2\bigr) = 2h(a^2 + \alpha^2 h^2).$$

Skal integrasjonsformelen være riktig i dette tilfellet må disse to uttrykkene være like, og dette ser vi holder om $\alpha^2 = 1/3$ eller

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Det siste tilfellet er $f(x) = x^3$. Da har vi

$$\int_{a-h}^{a+h} x^3\,dx = \Bigl[\frac{x^4}{4}\Bigr]_{a-h}^{a+h} = \frac{1}{4}\bigl((a+h)^4 - (a-h)^4\bigr) = 2ah(a^2 + h^2),$$
$$I_g(x^3) = h\bigl((a-\alpha h)^3 + (a+\alpha h)^3\bigr) = 2ah(a^2 + 3\alpha^2 h^2) = 2ah(a^2 + h^2),$$

der den siste likheten holder siden $\alpha^2 = 1/3$. Med andre ord er den tilnærmede integrasjonsformelen I_g riktig også i dette tilfellet.

Legg merke til at dette betyr at formelen vil være eksakt for alle tredjegradspolynomer. For å se dette, observerer vi først at om c_1 og c_2 er to tall og f_1 og f_2 to funksjoner, så er alltid

$$\begin{aligned} I_g(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= h\big(c_1 f_1(a-\alpha h) + c_2 f_2(a-\alpha h) \\ &\qquad + c_1 f_1(a+\alpha h) + c_2 f_2(a+\alpha h)\big) \\ &= c_1 I_g(f_1) + c_2 I_g(f_2). \end{aligned}$$

Denne egenskapen kalles *linearitet*, og integralet selv har den samme egenskapen (konstanter går utenfor integralet og integralet av en sum er summen av integralene).

Vi kan nå lett verifisere at vår tilnærming til integralet er eksakt for alle tredjegradspolynomer. For hvis $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$, så er (vi betegner det eksakte integralet med $I(p)$)

$$\begin{aligned} I(p) = \int_{a-h}^{a+h} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)\,dx = \\ c_0 \int_{a-h}^{a+h} 1\,dx + c_1 \int_{a-h}^{a+h} x\,dx + c_2 \int_{a-h}^{a+h} x^2\,dx + c_3 \int_{a-h}^{a+h} x^3\,dx. \end{aligned}$$

Siden integralene på høyre side alle kan integreres eksakt med vår tilnærmingsformel har vi derfor

$$\begin{aligned} I(p) &= c_0 I_g(1) + c_1 I_g(x) + c_2 I_g(x^2) + c_3 I_g(x^3) \\ &= I_g(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) \\ &= I_g(p), \end{aligned}$$

der den andre likheten følger av lineariteten til I_g.

c) Finn feilestimat av tilsvarende type som i (a) for I_g.

Løsning. Et feilestimat som det i (a) må være på formen

$$\Big|\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx - I_g(f)\Big| \le K \max_{x\in[a-h,a+h]} \big|f^{(n)}(x)\big|$$

for en passende n og en eller annen konstant K som ikke avhenger av f. Siden formelen er eksakt for tredjegrads polynomer, vet vi at høyresiden skal være 0 for $f(x) = 1$, x, x^2 og x^3. Dermed ser vi at vi må ha $n \ge 4$. Hvis $n > 4$, så får vi at formelen også er eksakt for $f(x) = x^4$, og det har vi ingen grunn til å tro (i og for seg lett å sjekke). Altså må vi ha $n = 4$. Feilestimatet vårt skal se ut som

$$\Big|\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx - h\big(f(a-\alpha h) + f(a+\alpha h)\big)\Big| \le K \max_{x\in[a-h,a+h]} \big|f''''(x)\big|.$$

For å få til dette, erstatter vi alle de tre uttrykkene som involverer f med Taylorpolynomer av tredje grad med tilhørende restledd, utviklet om a,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{6}f'''(a) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{(x-a)^4}{24}f''''(\xi_1), \\
f(a-\alpha h) &= f(a) - \alpha h f'(a) + \frac{\alpha^2h^2}{2}f''(a) - \frac{\alpha^3h^3}{6}f'''(a) + \frac{\alpha^4h^4}{24}f''''(\xi_2), \\
f(a+\alpha h) &= f(a) + \alpha h f'(a) + \frac{\alpha^2h^2}{2}f''(a) + \frac{\alpha^3h^3}{6}f'''(a) + \frac{\alpha^4h^4}{24}f''''(\xi_3),
\end{aligned}
$$

der ξ_1 varierer i intervallet $(a-h, a+h)$ når x varierer i $[a-h, a+h]$, mens $\xi_2 \in (a-h, a)$ og $\xi_3 \in (a, a+h)$. Nå vet vi jo at integrasjonsformelen vår er eksakt for alle tredjegradspolynomer, så i differansen $\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx - I_g(f)$ vil alt kansellere bortsett fra feilleddene. Vi får derfor

$$
\begin{aligned}
&\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx - I_g(f) \\
&\qquad = \int_{a-h}^{a+h} \frac{(x-a)^4}{24}f''''(\xi_1)\,dx - h\frac{\alpha^4h^4}{24}\big(f''''(\xi_2) + f''''(\xi_3)\big).
\end{aligned}
$$

Ved å ta maksimum av $\big|f''''(x)\big|$ og bruke trekantulikheten, får vi

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx - I_g(f)\Big| \\
&\qquad \le \Big(\int_{a-h}^{a+h} \frac{(x-a)^4}{24}\,dx + h\frac{\alpha^4h^4}{24}2\Big) \max_{x\in[a-h,a+h]}\big|f'''(x)\big| \\
&\qquad = \Big(\frac{1}{24}\Big[\frac{(x-a)^5}{5}\Big]_{a-h}^{a+h} + \frac{h^5}{9\cdot 12}\Big) \max_{x\in[a-h,a+h]}\big|f'''(x)\big| \\
&\qquad = \Big(\frac{2h^5}{24\cdot 5} + \frac{h^5}{108}\Big) \max_{x\in[a-h,a+h]}\big|f'''(x)\big| \\
&\qquad = \frac{19h^5}{1080} \max_{x\in[a-h,a+h]}\big|f'''(x)\big|,
\end{aligned}
$$

siden $\alpha^4 = 1/9$.

Dette er overaskende bra! Ved hjelp av to punkter får vi en tilnærmingsmetode der feilen går mot 0 med h^4. Dette karakteriserer Gausskvadratur - stor nøyaktighet med få punkter.