UNIVERSITY OF OSLO

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Examination in	MAT-INF 1100 — Modelling and computations
Day of examination:	October 15, 2004
Examination hours:	11:00 – 13:00

This problem set consists of 3 pages.

Appendices:	Formula sheet
Permitted aids:	Certified calculator

Please make sure that your copy of the problem set is complete before you attempt to answer anything.

Remember to fill in your candidate number below.

Candidate no.: ________

The first 10 problems each count 2 points, while the last 10 count 3 points each. The total score can therefore be at most 50 points. There are 5 alternative answers to each question, but only one of them is correct. If your answer is wrong or you do not answer a question, you get no points. In other words, there is no penalty for guessing. *Good luck!*

Problem and answer sheets

Problem 1. Det binære tallet 10111101 er det samme som det desimale tallet

☐ 205 ☐ 189 ☐ 301 ☐ 156 ☐ 123

Problem 2. Skrevet i totallssystemet blir tallet 123

☐ 1100110 ☐ 100011 ☐ 1111011 ☐ 1100101 ☐ 1010110

Problem 3. Desimaltallet 0.6 kan skrives på binær form som

☐ 0.100110011 ☐ 0.10010101 ☐ 0.111011
☐ kan ikke skrives som et binært tall
☐ krever uendelig mange binære siffer

Problem 4. Det reelle tallet $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{7}$ er

☐ et irrasjonalt tall ☐ uendelig ☐ -1 ☐ 1/3
☐ et rasjonalt tall

(Continued on page 2.)

Problem 5. Den minste øvre skranken x til en vilkårlig, begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ tilfredstiller

□ $x \in A$ □ $x > a$ for alle $a \in A$ □ $x \geq a$ for alle $a \in A$ □ $x \in \mathbb{N}$
□ $x \leq a$ for alle $a \in A$

Problem 6. Den minste øvre skranken til mengden $\{x < 2 \mid \sin x \geq 1\}$ er

□ $\pi/2$ □ 1 □ 2 □ 0 □ $\sqrt{2}$

Problem 7. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a+1)^{4361}$ der a er ulik 0, hva blir da koeffisienten foran a^{4360}?

□ 4360 □ 1 □ 4361 □ 8720 □ 2180

Problem 8. Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for spesielle verdier av a, b og c når det regnes med flyttall, vi ser bort fra underflow og overflow, og a, b og c er slik at operasjonene gir mening?

□ $a(b+c)$ □ abc □ a/b □ $a/(bc)$ □ $\sin(abc)$

Problem 9. Hvilket av følgende utsagn er sant?

□ `NaN` er et reelt tall □ ∞ er et reelt tall
□ Det fins flere 32 bits flyttall enn 64 bits flyttall
□ π kan representeres eksakt ved hjelp av 64 bits flyttall
□ Ethvert reelt tall kan tilnærmes vilkårlig godt med rasjonale tall

Problem 10. Hvilket av følgende utsagn er sanne?

□ Alle ligninger har løsninger som kan uttrykkes ved hjelp av rottegn
□ Halveringsmetoden konvergerer vanligvis raskere enn Newtons metode
□ For ethvert reelt tall a fins det en andregrads ligning som har a som rot
□ Et polynom av grad n har alltid n reelle nullpunkter
□ Ved løsning av andregradsligninger er alltid det ene nullpunktet større enn det andre

Problem 11. I denne oppgaven skal vi studere differensligningen

$$x_n = \frac{2}{x_{n-1}} + 1, \qquad n \geq 1$$

med startverdien $x_0 = 1$. Vår hypotese er at løsningen av differensligningen er gitt ved

$$x_n = \frac{6}{2 + (-1/2)^n} - 1. \tag{1}$$

La P_n for $n = 0, 1, 2, \ldots,$ betegne påstanden at formelen (1) er sann.

(Continued on page 3.)

Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. Vi ser med en gang at $x_0 = \frac{6}{2+1} - 1 = 1$ så P_0.
2. Anta at vi har vist at P_n er sann for $n = 0, \dots, k$, vi må vise at da er også P_{k+1} sann. Vi har

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{2}{x_k} + 1 = \frac{2}{\dfrac{6}{2+(-1/2)^k} - 1} + 1 = \frac{2}{\dfrac{4-(-1/2)^k}{2+(-1/2)^k}} + 1 \\ &= \frac{2(2+(1/2)^k)}{4-(-1/2)^k} + 2 - 1 = \frac{12}{2(2-(1/2)(1/2)^k)} - 1 \\ &= \frac{6}{2+(-1/2)^{k+1}} + 1. \end{aligned}$$

Dermed ser vi at om P_k er sann er også P_{k+1} sann så formelen (1) er riktig for alle $n \geq 1$.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

☐ Påstanden P_n er sann, men del 1 av induksjonsbeviset er feil
☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
☐ Påstanden P_n er feil, men del 2 av induksjonsbeviset er riktig
☐ Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
☐ Påstanden P_n er feil, men del 1 av induksjonsbeviset er riktig

Problem 12. En kontinuerlig funksjon f har et nullpunkt i intervallet $[0, 1]$, og vi bruker halveringsmetoden for å finne en numerisk tilnærming til nullpunktet. Vi ønsker å bestemme nullpunktet med feil mindre enn 10^{-15}. Hvor mange halveringer må vi i så fall gjøre for å være sikre på at vi overholder dette kravet når vi ikke vet noe nærmere om hvor nullpunktet befinner seg?

☐ 50 ☐ 16 ☐ 35 ☐ 43 ☐ 66

Det var det!!