UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 7. januar 2005. Utsatt/Ny prøve.
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = e^{-x}$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/6$ ☐ $1 - x + x^2/2 - x^3/6$

☐ $-1 - x - x^2/2 - x^3/6$ ☐ $1 + x^2/2$ ☐ $-x - x^3/6$

Oppgave 2. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = 1/(1 + x)$ om punktet $a = 0$ er

☐ 1 ☐ $-1/8$ ☐ 0 ☐ $1/4$ ☐ $-1/6$

Oppgave 3. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = x$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ 1 ☐ x^2 ☐ x^3 ☐ $1 + x + x^2$ ☐ x

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Hvilket av følgende utsagn om differensiallikninger er korrekt?

□ Alle andreordens likninger har nøyaktig 2 løsninger

□ En førsteordens differensiallikning har alltid en entydig løsning når verdien til den ukjente funksjonen er gitt i et punkt

□ En lineær, andreordens likning med konstante koeffissienter har alltid en entydig løsning når verdien til den ukjente funksjonen og dens førstederiverte er gitt i et punkt

□ Eulers metode er eksakt når differensiallikningen har lineære koeffisienter

□ Vi kan alltid legge sammen to løsninger av en differensiallikning og få en ny løsning

Oppgave 5. Ett av følgende utsagn om varierende temaer er feil, hvilket?

□ Hvis f er kontinuerlig og $f(a) < 0 < f(b)$ kan vi alltid finne en tilnærming til et nullpunkt for f i (a, b) ved hjelp av halveringsmetoden

□ En separabel differensialligning er alltid av første orden

□ Feilleddet for Taylorpolynomet til $\sin(x)$ om $a = 0$ går mot 0 for alle x

□ Det fins ingen generell formel for løsningen til en homogen, førsteordens, lineær differensiallikning med konstante koeffisienter

□ Simpsons metode gir som regel mindre feil enn trapesmetoden

Oppgave 6. Vi skal integrere $f(x)$ numerisk over intervallet $[0, 1]$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

□ Trapesmetoden er mer nøyaktig enn Simpsons metode hvis f er positiv

□ Både trapesmetoden og Simpsons metode er eksakte når $f(x) = \alpha x + \beta$ der α og β er vilkårlige, reelle tall

□ Dersom f er integrerbar er Simpsons metode eksakt

□ Trapesmetoden er eksakt dersom f tilsvarer en rett linje, men det er ikke Simpsons metode siden den er basert på kvadratisk interpolasjon

□ Numerisk integrasjon fungerer bare godt for en funksjon der restleddet i Taylors formel er null

Oppgave 7. Hvilken av disse differensialligningene er separabel i x og y?

□ $xy' + \sin(xy) = 0$ □ $y' + \sin y = x$ □ $y' + xy^2 = -x$

□ $y' + y = \ln(xy)$ □ $y' + p(x)y = f(x)$

Oppgave 8. Differensialligningen $y' = y^2$ har den generelle løsningen

□ $y(x) = 1/(C - x)$ □ $y(x) = C\,\mathrm{ArcTan}\, x$ □ $y(x) = C(e^x)^2$

□ $y(x) = C \sin(1 + x^2)$ □ $y(x) = x + C$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. Differensialligningen $y'' - 2y' = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = e^{2x}(C \sin x + Dx)$ ☐ $y(x) = Ce^{2x} + D$

☐ $y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$ ☐ $y(x) = C\sin(2x) + D$

☐ $y(x) = (C + D)e^{2x}$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Oppgave 10. Vi har gitt differensialligningen $y' + y = x$ for $x \geq 0$ med initialbetingelsen $y(0) = 1$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Vi må ha to initialbetingelser for å få en entydig løsning, ikke bare en

☐ $y'(x)$ vokser over alle grenser når $x \to \infty$ ☐ $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$

☐ $y(x) = x - 1$ ☐ $y(x) = x^2 - x + e^{-x}$

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Merk også at oppgavene ikke bygger på hverandre. I oppgavene 1, 3 og 4 er det derfor mulig å løse deloppgave b selv om du ikke har løst deloppgave a.

Oppgave 1.

a) Løs differensialligningen

$$y'' + 9y = 0$$

med initialverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

b) Løs differensialligningen

$$y'' + 9y = x$$

med intitialverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Oppgave 2. Vi har gitt differensligningen

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{9} + 2, \quad n \geq 0,$$

med startverdien $x_0 = 2$. Vis ved induksjon at $x_n < 3$ for alle heltall $n \geq 0$.

Oppgave 3.

a) Løs differensligningen

$$x_{n+2} + 4x_n = 0, \quad n \geq 0,$$

med startverdiene $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$.

b) Løs differensligningen

$$x_{n+2} + 4x_n = n + \frac{2}{5}, \quad n \geq 0,$$

med startverdiene $x_0 = x_1 = 0$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4.

a) Vi har gitt verdiene av en funksjon f i punktene $x = h$ og $x = 2h$. Ved å tilnærme f med en rett linje $\ell(x)$ som har samme verdi som f både i $x = h$ og $x = 2h$ (altså lineær interpolasjon i disse punktene) kan vi regne ut en tilnærming til $f(0)$,

$$f(0) \approx \ell(0) = A(f) = 2f(h) - f(2h).$$

Utled denne tilnærmingen og vis at feilen er begrenset av

$$\left|f(0) - A(f)\right| \leq 3h^2 \max_{x \in [0,2h]} \left|f''(x)\right|.$$

dersom f er 2 ganger kontinuerlig deriverbar.

b) Vi har nå gitt $f(0)$ og $f(h)$ og ønsker fra dette å finne en tilnærming til $f(x)$ for $x \in (0, h)$ ved lineær interpolasjon av f i de to punktene $x = 0$ og $x = h$. Vis at denne tilnærmingen er gitt ved

$$f(x) \approx B(f) = f(0)\frac{h - x}{h} + f(h)\frac{x}{h},$$

og finn en øvre grense for feilen på samme måte som i (a).
Hint: I denne oppgaven kan du bruke at feilleddet i Taylors formel kan skrives

$$R_n f(x) = \frac{(x - a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!},$$

der ξ er et tall i intervallet $[a, x]$.

Lykke til!