UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 7. januar 2005. Utsatt/Ny prøve.
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Fasit/løsningsforslag

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = e^{-x}$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/6$ ☑ $1 - x + x^2/2 - x^3/6$

☐ $-1 - x - x^2/2 - x^3/6$ ☐ $1 + x^2/2$ ☐ $-x - x^3/6$

Oppgave 2. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = 1/(1 + x)$ om punktet $a = 0$ er

☑ 1 ☐ $-1/8$ ☐ 0 ☐ $1/4$ ☐ $-1/6$

Oppgave 3. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = x$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ 1 ☐ x^2 ☐ x^3 ☐ $1 + x + x^2$ ☑ x

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Hvilket av følgende utsagn om differensiallikninger er korrekt?

☐ Alle andreordens likninger har nøyaktig 2 løsninger

☐ En førsteordens differensiallikning har alltid en entydig løsning når verdien til den ukjente funksjonen er gitt i et punkt

☑ En lineær, andreordens likning med konstante koeffissienter har alltid en entydig løsning når verdien til den ukjente funksjonen og dens førstederiverte er gitt i et punkt

☐ Eulers metode er eksakt når differensiallikningen har lineære koeffisienter

☐ Vi kan alltid legge sammen to løsninger av en differensiallikning og få en ny løsning

Oppgave 5. Ett av følgende utsagn om varierende temaer er feil, hvilket?

☐ Hvis f er kontinuerlig og $f(a) < 0 < f(b)$ kan vi alltid finne en tilnærming til et nullpunkt for f i (a, b) ved hjelp av halveringsmetoden

☐ En separabel differensialligning er alltid av første orden

☐ Feilleddet for Taylorpolynomet til $\sin(x)$ om $a = 0$ går mot 0 for alle x

☑ Det fins ingen generell formel for løsningen til en homogen, førsteordens, lineær differensiallikning med konstante koeffisienter

☐ Simpsons metode gir som regel mindre feil enn trapesmetoden

Oppgave 6. Vi skal integrere $f(x)$ numerisk over intervallet $[0, 1]$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Trapesmetoden er mer nøyaktig enn Simpsons metode hvis f er positiv

☑ Både trapesmetoden og Simpsons metode er eksakte når $f(x) = \alpha x + \beta$ der α og β er vilkårlige, reelle tall

☐ Dersom f er integrerbar er Simpsons metode eksakt

☐ Trapesmetoden er eksakt dersom f tilsvarer en rett linje, men det er ikke Simpsons metode siden den er basert på kvadratisk interpolasjon

☐ Numerisk integrasjon fungerer bare godt for en funksjon der restleddet i Taylors formel er null

Oppgave 7. Hvilken av disse differensialligningene er separabel i x og y?

☐ $xy' + \sin(xy) = 0$ ☐ $y' + \sin y = x$ ☑ $y' + xy^2 = -x$

☐ $y' + y = \ln(xy)$ ☐ $y' + p(x)y = f(x)$

Løsningsforlsag. Ligningen i det tredje alternativet kan omskrives til $y'/(1 + y^2) = -x$ som opplagt er separabel.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Differensialligningen $y' = y^2$ har den generelle løsningen

☑ $y(x) = 1/(C - x)$ ☐ $y(x) = C \operatorname{ArcTan} x$ ☐ $y(x) = C(e^x)^2$

☐ $y(x) = C \sin(1 + x^2)$ ☐ $y(x) = x + C$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Løsningsforlsag. Denne ligningen er separabel og kan skrives $y'/y^2 = 1$. Altså er

$$-y^{-1} = \int \frac{y'}{y^2} dy = \int 1\, dx + C = x + C.$$

Fra dette følger svaret.

Oppgave 9. Differensialligningen $y'' - 2y' = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = e^{2x}(C \sin x + Dx)$ ☑ $y(x) = Ce^{2x} + D$

☐ $y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$ ☐ $y(x) = C \sin(2x) + D$

☐ $y(x) = (C + D)e^{2x}$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Løsningsforlsag. Dette er en tradisjonell andreordens ligning med konstante koeffisienter. Det karakteristiske polynomet er $z^2 - 2z = 0$ som har røttene $r_1 = 2$ og $r_2 = 0$. Dermed er den generelle løsningen

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} = Ce^{2x} + D.$$

Oppgave 10. Vi har gitt differensialligningen $y' + y = x$ for $x \geq 0$ med initialbetingelsen $y(0) = 1$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Vi må ha to initialbetingelser for å få en entydig løsning, ikke bare en

☐ $y'(x)$ vokser over alle grenser når $x \to \infty$ ☑ $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$

☐ $y(x) = x - 1$ ☐ $y(x) = x^2 - x + e^{-x}$

Løsningsforlsag. Den generelle løsningen til den homogene ligningen $y' + y = 0$ er $y_h(x) = Ce^{-x}$. For å finne en partikulær løsning prøver vi med $y_p(x) = Ax + B$. Skal dette være en løsning må vi ha

$$x = y_p' + y_p = A + Ax + B.$$

Skal dette holde for alle verdier av x må de to polynomene på hver side være like, altså ha samme koeffisienter. Altså må vi ha $A = 1$ og $A + B = 0$ slik at $B = -1$. Den generelle løsningen er derfor

$$y(x) = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Det eneste alternativet på denne formen er alternativ 3.
Merk at denne ligningen også kan løses med teknikken i seksjon 10.1 i Kalkulus.

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Merk også at oppgavene ikke bygger på hverandre. I oppgavene 1, 3 og 4 er det derfor mulig å løse deloppgave b selv om du ikke har løst deloppgave a.

Oppgave 1.

a) Løs differensialligningen

$$y'' + 9y = 0$$

med initialverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Løsningsforlsag. Det karaktertistiske polynomet er $z^2+9 = 0$ som har de to kompleks konjugerte røttene $r = 3i$ og $\bar{r} = -3i$. Dermed er den generelle løsningen

$$y(x) = C\cos 3x + D\sin 3x.$$

Betingelsen $y(0) = 0$ gir $0 = y(0) = C$ så $y(x) = D\sin 3x$. Siden $y'(x) = 3D\cos 3x$ gir betingelsen $y'(0) = 1$ da $1 = y'(0) = 3D$ så $D = 1/3$. Dermed er løsningen

$$y(x) = \frac{1}{3}\sin 3x.$$

b) Løs differensialligningen

$$y'' + 9y = x$$

med intitialverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Løsningsforlsag. Vi vet fra (a) at den generelle løsningen til den homogene ligningen $y'' + 9y = 0$ er $y_h(x) = C\cos 3x + D\sin 3x$. For å finne en partikulærløsning prøver vi med en løsning på samme form som høyresiden, nemlig $y_p(x) = Ax + B$. Vi setter inn og får

$$x = y_p'' + 9y_p = 0 + 9Ax + 9B.$$

Skal denne likheten holde for alle verdier av x må vi ha $9A = 1$ og $9B = 0$. Altså er $A = 1/9$ og $B = 0$ slik at partikulærløsningen er $y_p(x) = x/9$. Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er derfor

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\cos 3x + D\sin 3x + \frac{x}{9}$$

som har derivert $y'(x) = 3(-C\sin 3x + D\cos 3x) + 1/9$. Initialverdiene gir da $0 = y(0) = C$ og $1 = y'(0) = 3D + 1/9$ slik at $D = 8/27$. Løsningen er derfor

$$y(x) = \frac{8}{27}\sin 3x + \frac{x}{9}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 2. Vi har gitt differensligningen

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{9} + 2, \quad n \geq 0,$$

med startverdien $x_0 = 2$. Vis ved induksjon at $x_n < 3$ for alle heltall $n \geq 0$.

Løsningsforlsag. Vi legger først merke til at leddene i følgen må være positive siden $x_{n+1} \geq 2$ for $n \geq 0$ og $x_0 = 2$. Et induksjonsbevis for at $x_n < 3$ for alle $n \geq 0$ er som følger.
Vi ser at x_n opplagt er mindre enn 3 for $n = 0$ siden $x_0 = 2$.
Anta nå at vi har vist at $x_n < 3$ for $n = 0, 1, \ldots, k$; vi må vise at da er også $x_{k+1} < 3$. Vi har

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2}{9} + 2 < \frac{3^2}{9} + 2 < 1 + 2 = 3$$

siden vi på grunn av induksjonshypotesen vet at $x_k < 3$. Dermed er resultatet bevist.
Merk at det er vesentlig at $x_k \geq 0$, hvis ikke har vi ikke nødvendigvis $x_k^2 < 9$ selv om $x_k < 3$.

Oppgave 3.

a) Løs differensligningen

$$x_{n+2} + 4x_n = 0, \quad n \geq 0,$$

med startverdiene $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$.

Løsningsforlsag. Det karakteristiske polynomet er

$$r^2 + 4 = 0$$

som har de to kompleks konjugerte røttene $r = 2i$ og $\bar{r} = -2i$. Siden $r = 2e^{i\pi/2}$ vet vi da at den generelle løsningen til differensligningen er

$$x_n = 2^n \big(C\cos(n\pi/2) + D\sin(n\pi/2)\big).$$

Startverdien $x_0 = 1$ gir $1 = x_0 = C$ mens $x_1 = 0$ gir $0 = 2(0 + D)$ eller $D = 0$. Dermed er løsningen

$$x_n = 2^n \cos(n\pi/2).$$

(Fortsettes på side 6.)

b) Løs differensligningen

$$x_{n+2} + 4x_n = n + \frac{2}{5}, \quad n \geq 0,$$

med startverdiene $x_0 = x_1 = 0$

Løsningsforlsag. Den generelle løsningen til den homogene ligningen er $x_n^h = 2^n\bigl(C\cos(n\pi/2) + D\sin(n\pi/2)\bigr)$ som i (a). For å finne en partikulær løsning prøver vi med en løsning på formen $x_n^p = An + B$. Dette gir

$$n + \frac{2}{5} = x_{n+2}^p + 4x_n^p = A(n+2) + B + 4An + 4B = 5An + 2A + 5B.$$

Skal disse likhetene holde for alle verdier av n må de to polynomene i n være like, noe som betyr at koeffisientene må være like. Dermed må vi ha $5A = 1$ og $2A + 5B = 2/5$ som gir $A = 1/5$ og $B = 0$. En partikulærløsning er derfor $x_n^p = n/5$ slik at den generelle løsningen er

$$x_n = x_n^h + x_n^p = 2^n\bigl(C\cos(n\pi/2) + D\sin(n\pi/2)\bigr) + \frac{n}{5}.$$

Startverdien $x_0 = 0$ gir nå $0 = C$ mens startverdien $x_1 = 0$ gir $0 = 2D + 1/5$. Fra dette får vi $D = -1/10$ slik at løsningen er

$$x_n = \frac{1}{10}\bigl(2n - 2^n\sin(n\pi/2)\bigr).$$

Oppgave 4.

a) Vi har gitt verdiene av en funksjon f i punktene $x = h$ og $x = 2h$. Ved å tilnærme f med en rett linje $\ell(x)$ som har samme verdi som f både i $x = h$ og $x = 2h$ (altså lineær interpolasjon i disse punktene) kan vi regne ut en tilnærming til $f(0)$,

$$f(0) \approx \ell(0) = A(f) = 2f(h) - f(2h).$$

Utled denne tilnærmingen og vis at feilen er begrenset av

$$\bigl|f(0) - A(f)\bigr| \leq 3h^2 \max_{x\in[0,2h]}\bigl|f''(x)\bigr|.$$

dersom f er 2 ganger kontinuerlig deriverbar.

Løsningsforlsag. Vi skal finne en rett linje ℓ som interpolerer f i $x = h$ og $x = 2h$ og så bruke verdien til denne rette linja som en tilnærming til $f(0)$. Formelen for en rett linje er $\ell(x) = c_0 + c_1 x$ der c_0 og c_1 er vilkårlige tall som vi må bestemme. Siden ℓ skal ha samme verdi som f i h må vi ha $f(h) = \ell(h) = c_0 + c_1 h$. Interpolasjon i $x = 2h$ gir $f(2h) = \ell(2h) = c_0 + c_1 2h$. Vi har altså de to ligningene

$$\begin{aligned} c_0 + hc_1 &= f(h), \\ c_0 + 2hc_1 &= f(2h), \end{aligned}$$

der c_0 og c_1 er ukjente. Løser vi disse får vi

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{f(2h) - f(h)}{h}, \\ c_0 &= 2f(h) - f(2h). \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

Altså er

$$\ell(x) = 2f(h) - f(2h) + \frac{(2h) - f(h)}{h}x.$$

Vår strategi er å bruke $\ell(0) = A(f)$ som en tilnærming til $f(0)$, noe som gir

$$f(0) \approx \ell(0) = c_0 = 2f(h) - f(2h)$$

som er det vi skulle vise.

Merk at regningen for å bestemme $\ell(x)$ hadde blitt litegrann enklere om vi hadde brukt formen $\ell(x) = b_0 + b_1(x - h)$ der b_0 og b_1 er vilkårlige koeffisienter.

I del 2 av oppgaven skal vi utlede feilestimatet. Dette består i å omforme uttrykket

$$\bigl|f(0) - A(f)\bigr| = \bigl|f(0) - 2f(h) + f(2h)\bigr|.$$

Her bruker vi standardmetoden som består i å erstatte $f(h)$ og $f(2h)$ med passende Taylorpolynomer om 0 med feilledd. Fra formen på estimatet vi skal fram til ser vi at vi bør bruke et lineært Taylorpolynom med feilledd. Taylorutviklingen av $f(x)$ er

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(c)$$

der c er et tall mellom 0 og c. Setter vi først $x = h$ og så $x = 2h$ får vi

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(c_1), \qquad c_1 \in (0, h) \\ f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + 2h^2 f''(c_2), \qquad c_2 \in (0, 2h). \end{aligned}$$

Ved hjelp av dette får vi

$$\begin{aligned} 2f(h) - f(2h) &= 2f(0) + 2hf'(0) + h^2 f''(c_1) - f(0) - 2hf'(0) - 2h^2 f''(c_2) \\ &= f(0) + h^2 f''(c_1) - 2h^2 f''(c_2). \end{aligned}$$

Innsatt i utrykket for feilen gir dette

$$\begin{aligned} \bigl|f(0) - 2f(h) + f(2h)\bigr| &= \bigl|-h^2 f''(c_1) + 2h^2 f''(c_2)\bigr|, \\ &\le h^2\Bigl(\bigl|f''(c_1)\bigr| + 2\bigl|f''(c_2)\bigr|\Bigr) \\ &\le h^2\Bigl(\max_{c_1\in[0,2h]}\bigl|f''(c_1)\bigr| + \max_{c_2\in[0,2h]}\bigl|f''(c_2)\bigr|\Bigr) \\ &= 3h^2 \max_{x\in[0,2h]}\bigl|f''(x)\bigr|. \end{aligned}$$

I den første ulikheten har vi brukt trekantulikheten og i den andre har vi erstattet $\bigl|f''(c_1)\bigr|$ og $\bigl|f''(c_2)\bigr|$ med $\max \in [0, 2h]\bigl|f(c_1)\bigr|$.

(Fortsettes på side 8.)

b) Vi har nå gitt $f(0)$ og $f(h)$ og ønsker fra dette å finne en tilnærming til $f(x)$ for $x \in (0,h)$ ved lineær interpolasjon av f i de to punktene $x=0$ og $x=h$. Vis at denne tilnærmingen er gitt ved

$$f(x) \approx B(f) = f(0)\frac{h-x}{h} + f(h)\frac{x}{h},$$

og finn en øvre grense for feilen på samme måte som i (a).
Hint: I denne oppgaven kan du bruke at feilleddet i Taylors formel kan skrives

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

der ξ er et tall i intervallet $[a,x]$.

Løsningsforlsag. Denne oppgaven løses på helt tilsvarende måte som (a). Vi kan godt utlede formelen $B(f)$ ut fra interpolasjonsbetingelsene i $x=0$ og $x=h$, men for å vise at

$$p(x) = f(0)\frac{h-x}{h} + f(h)\frac{x}{h} \tag{1}$$

er en lineær interpolant til f i $x=0$ og $x=h$ er det nok å observere at $p(x)$ er et førstegradspolynom og at $p(0)=f(0)$ og $p(h)=f(h)$.
La oss nå utlede et feilestimat. Feilen er gitt ved uttrykket $\bigl|f(x)-p(x)\bigr|$ der $p(x)$ er gitt ved (1). Vi bruker samme strategi som i (a) og erstatter alle funksjonsuttrykk, bortsett fra $f(0)$, med Taylorpolynomer med feilledd. Vi bruker altså utrykkene

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(c_3), \qquad && c_3 \in (0,x)\\
f(h) &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(c_4), \qquad && c_4 \in (0,h).
\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$p(x) = f(0)\frac{h-x}{x} + \frac{x}{h}\bigl(f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2}f''(c_4)\bigr) = f(0)+xf'(0)+\frac{xh}{2}f''(c_4).$$

Feilen blir derfor

$$\begin{aligned}
\bigl|f(x)-p(x)\bigr| &= \Bigl|f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(c_3) - f(0) - xf'(0) - \frac{xh}{2}f''(c_4)\Bigr|\\
&= \Bigl|\frac{x^2}{2}f''(c_3) - \frac{xh}{2}f''(c_4)\Bigr|\\
&\le \frac{x^2}{2}\bigl|f''(c_3)\bigr| + \frac{xh}{2}\bigl|f''(c_4)\bigr|\\
&\le h^2 \max_{x\in[0,h]}\bigl|f''(x)\bigr|.
\end{aligned}$$

Her har vi brukt trekantulikheten i første ulikhet, mens vi i andre ulikhet har brukt at $x \le h$ og har erstattet $\bigl|f(c_3)\bigr|$ og $\bigl|f(c_4)\bigr|$ med $\max_{x\in[0,h]}\bigl|f''(x)\bigr|$.

Lykke til!