UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 7. desember 2006.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgåvesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatne hjelpemiddel:	Godkjend kalkulator.

Kontroller at oppgåvesettet er komplett før
du tek til å svare på spørsmåla.

Hugs å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen inneheld 7 fleirvalsoppgåver som teller 4 poeng kvar. Det er kun eitt rett svaralternativ på kvar av desse oppgåvene. Om du svarar feil eller let vera å krysse av på ei oppgåve, får du null poeng. Du blir altså ikkje "straffa" for å gjette. Andre del av eksamen inneheld tradisjonelle oppgåver. I denne delen teller kvart av dei 6 delspørsmåla 12 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du grunngje korleis du har kome fram til resultata dine. Svar som ikkje er grunngjevne får 0 poeng sjølv om dei er rette!

Del 1: Fleirvalsoppgåver

Oppgave 1. Koeffisienten foran x^2 i Taylor-polynomet til funksjonen $f(x) = x^2 - \cos x$ utvikla om punktet $a = 0$ er

☐ 0 ☐ $-1/2$ ☑ $3/2$ ☐ 1 ☐ $1/2$

Løysing. Rett fram bruk av Taylors formel.

Oppgave 2. Taylor-polynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = \sin(x^2)$ utvikla om punktet $a = 0$ er gjeve ved

☐ $x^2/2$ ☐ $x + x^2/2$ ☐ $x - x^2/2$ ☐ $-x^2$ ☑ x^2

Løysing. Rett fram bruk av Taylors formel her og. Ein kan også nytte formelen for $g(x) = \sin(x)$, $T_1 g(x) = x$, og setje inn x^2 i staden for x.

(Framhald på side 2.)

Oppgave 3. Differensiallikninga $y'' + 4y' + 4y = 0$ har den generelle løysinga

☐ $y(x) = e^{-2x}(C \sin x + D \cos x)$ ☑ $y(x) = Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$

☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{2x}$ ☐ $y(x) = C \cos 2x + D \sin 2x$

☐ $y(x) = e^{-2x}(C \sin 2x + D \cos 2x)$

der C og D er vilkårlege, reelle tal.

Løysing. Likninga er lineær, av andre orden og har konstante koeffisientar. Den karakteristiske likninga er $r^2 + 4r + 4 = 0$ og har ein reell rot $r = -2$. Frå formelsida ser vi da at løysinga er $y(x) = Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$

Oppgave 4. Differensiallikninga $x^2y' + y = 1$, der $x > 0$, har den generelle løysinga

☐ $y(x) = x^2 + Ce^{-x^2}$ ☐ $y(x) = 1 + Ce^x$ ☐ $y(x) = x^2 + C$

☑ $y(x) = 1 + Ce^{1/x}$ ☐ $y(x) = Cx^2$

der C er eit vilkårleg, reelt tall.

Løysing. Likninga er lineær og av fyrste orden. Vi skriv den om til vanleg form $y' + f(x)y = g(x)$:

$$y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}.$$

Frå Kalkulus har vi den integrerande faktoren $e^{\int f(x)dx}$ som blir $e^{-1/x}$. Vi ganger med den og får

$$\left(e^{-1/x}y\right)' = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}.$$

Begge sidane integreras og vi sjår at integralet av høgresiden direkte gir $e^{-1/x} + C$. Resten er rakt fram.
Vi kan og sjå at $y_p = 1$ er ein partikularløysing og leggje tel den homogene løysinge som vi finn ved å separere likninga.
Det er sjølvsagt og mogleg å prøve alternativa etter tur.

Oppgave 5.
Ei partikulærløysing av differensiallinninga $y'' - 3y' = 1$ er gjeven ved

☐ $y(x) = e^{3x}/3$ ☐ $y(x) = -1/3$ ☐ $y(x) = -x^2/3$

☐ $y(x) = x/3$ ☑ $y(x) = -x/3$

Løysing. y_p =konstant går ikkje (er ei homogenløysing). Da prøvar vi $y_p = Ax$ og finn ein A slik at ho passar.

Oppgave 6. Vi har ein bakteriekultur der talet på bakterier, y, er ein funksjon av tida, t, som vi måler i timer. Vekstraten (den tidsderiverte av talet) er proposjonal med talet y. Vidare veit vi at talet på bakterier doblar seg i løpet av to timar. Kva er differensiallikninga som modellerer veksten av bakteriekulturen?

☐ $y' = -2y$ ☐ $y' = y(1 + 2y)$ ☐ $y'' = 4y$ ☑ $y' = \dfrac{\ln 2}{2}y$

☐ $y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$

(Framhald på side 3.)

Løysing. Den tidsderiverte er proposjonal med talet sjølv. Da må likninga ha forma $y' = ky$ som har løysinga $y = Ae^{kt}$. Vi veit og at talet veks. Da må eitt av alternativa 3, 4 eller 5 vere rett, men vi finne (velge) rett k. I løpet av 2 timar dobler talet bakterier seg, det vil seie $2 = e^{2k}$, som er ein likning for k. Bruk av logaritme gir da $k = \ln 2/2$.

Oppgave 7. Vi tilnærmar det bestemde integralet $\int_0^h f(x)\,dx$ med uttykket $h\bigl(f(0) + f(h)\bigr)/2$ der vi antek at f, f' og f'' er kontinuerlige funksjoner. Da er feilen

$$\Bigl|\int_0^h f(x)\,dx - \frac{h}{2}\bigl(f(0) + f(h)\bigr)\Bigr|$$

avgrensa av

- ☐ $h^2 \max_{x\in[0,h]}\bigl|f'(x)\bigr|$
- ☑ $\dfrac{5h^3}{12} \max_{x\in[0,h]}\bigl|f''(x)\bigr|$
- ☐ $h \max_{x\in[0,h]}\bigl|f(x)\bigr|$
- ☐ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x\in[0,h]}\bigl|f'''(x)\bigr|$
- ☐ $\dfrac{h}{2} \max_{x\in[0,h]}\bigl|f'(x)\bigr|$

Løysing. Vi finn feilgrensa ved hjelp av Taylorpolynom kring $x = 0$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2,$$

der $c = c(x)$ er ein funksjon av x. For integralet finn vi da

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x)\,dx &= \int_0^h \left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2\right)dx \\ &= \left[f(0)x + \frac{1}{2}f'(0)x^2\right]_0^h + \int_0^h \frac{1}{6}f''(c)x^2\,dx \\ &= f(0)h + \frac{1}{2}f'(0)h^2 + \int_0^h \frac{1}{6}f''(c)x^2\,dx,\end{aligned}$$

medan tilnærminga (trapesformelen) gir

$$\begin{aligned}h\bigl(f(0) + f(h)\bigr)/2 &= h\bigl(f(0) + f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(c(h))h^2)\bigr) \\ &= f(0)h + \frac{1}{2}f'(0)h^2 + \frac{1}{4}f''(c(h))h^3.\end{aligned}$$

Feilen er da

$$\begin{aligned}\Bigl|\int_0^h f(x)\,dx - \frac{h}{2}\bigl(f(0) + f(h)\bigr)\Bigr| &= \Bigl|\int_0^h \frac{1}{6}f''(c)x^2\,dx - \frac{1}{4}f''(c(h))h^3\Bigr| \\ \le \Bigl|\int_0^h \frac{1}{6}f''(c)x^2\,dx\Bigr| + \Bigl|\frac{1}{4}f''(c(h))h^3\Bigr| &\le \Bigl|\int_0^h \frac{1}{6}Mx^2\,dx\Bigr| + \frac{1}{4}Mh^3 \\ &= \frac{5}{12}Mh^3\end{aligned}$$

der $M = \max_{x\in[0,h]}\bigl|f''(x)\bigr|$ og vi har nytta *trekantulikheten* før den andre linja. Andre metodar kan gi strengare feilmål, men alternativ 2 er like rett for det.

(Framhald på side 4.)

Del 2

Hugs at i denne delen må alle svar grunngjevast!

Oppgave 1. Løys differenslikninga

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Løysing. Ho er lineær, av andre orden, og har konstante koeffissientar. Karakteristisk likning er $r^2 - 3r + 2 = 0$, med løysingar $r = 1$ og $r = 2$. Homgenløysinga blir

$$x_n^H = A1^n + B2^n = A + B2^n.$$

Avdi 1 er ei homogenløysing velger vi partikularløysinga $x_n^p = Cn$. Innsetjing i differenslikninga gir da

$$\begin{aligned} C(n+2) - 3C(n+1) + 2Cn &= 1 \\ C(n - 3n + 2n) + C(2-3) &= 1 \\ -C &= 1, \end{aligned}$$

og vi finn den fullstendige løysinga

$$x_n = A + B2^n - n.$$

Startkrava gir så $0 = x_0 = A + B$ og $0 = x_1 = A + 2B - 1$, som er to kopla likningar som vi løysar for A og B. Vi finn $A = -1$, $B = 1$ og

$$x_n = 2^n - 1 - n.$$

Oppgave 2. Finn Taylor-polynomet av grad 3 utvikla om $a = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \cos x + \sin x$$

og vis at restleddet $R_3 f(x)$ er avgrensa av

$$\left| R_3 f(x) \right| \leq 0.1$$

på intervallet $[0, 1]$.

Løysing.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \sin x, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x + \cos x, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\cos x - \sin x, & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin x - \cos x, & f'''(0) &= -1 \\ f''''(x) &= \cos x + \sin x. \end{aligned}$$

Taylorpolynomet blir da

$$T_3 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

I staden kunne vi ha funne polynom for $\cos x$ og $\sin x$ kvar for seg og så lagt dei saman.
Restleddet blir

$$R_3 f(x) = \frac{1}{24} f''''(c)x^4 = \frac{(\cos c + \sin c)}{24} x^4,$$

(Framhald på side 5.)

og

$$\left|R_3 f(x)\right| = \frac{\left|\cos c + \sin c\right|\left|x^4\right|}{24} \leq \frac{|\cos c| + |\sin c|}{24} x^4,$$

der vi har nytta *trekantulikheten* og at $x \geq 0$. Sidan $|\cos c| < 1$, $|\sin c| < 1$ og $x < 1$ fylger

$$\left|R_3 f(x)\right| \leq \frac{(1+1)1^4}{24} = \frac{1}{12} < 0.1 \leq 0.1.$$

Merknad: Vi kan finne strengare feilgrener enn 0.1 (tildømes er 1/12), men det er ikkje noko poeng her.

Oppgave 3. Det desimale talet 12.125 skal omgjeras fra ti-talsystemet til to-talsystemet (binær form). Alle stega i omgjeringa skal gjes nøyaktig.

Løysing. Fyrst finn vi binærforma av det heile talet 12. Siffere reknes frå høgre mot venstre. Vi får sifferet 1 når talet er odde, sifferet 0 når det er like. Etter heltalsdivisjon på 2 får vi eit nytt tal som handteras på samme vis. Slik held vi fram til vi får null.

$$\begin{array}{rcr|l} & & 12 & 0 \\ 12//2 & = & 6 & 0 \\ 6//2 & = & 3 & 1 \\ 3//2 & = & 1 & 1 \\ 1//2 & = & 0 & \end{array}$$

Vi fann $12_{10} = 1100_2$. For desimaldelen rekner vi ut siffer fra venstre mot høgre. Kvar gang får vi sifferet ein dersom talet er større enn 0.5. Da trekk vi ifrå 0.5. Er talet mindre enn 0.5 blir sifferet 0. Så gangast talet med 2 og vi held fram. Dersom vi får 0 stoppar desimalutviklinga.

$$\begin{array}{ccc|l} & & 0.125 & 0 \\ 0.125 \cdot 2 & = & 0.25 & 0 \\ 0.25 \cdot 2 & = & 0.5 & 1 \\ (0.5 - 0.5) \cdot 2 & = & 0 & \end{array}$$

Vi set saman tala $12.125_{10} = 1100.001_2$
For å få full pott er det tildømes nok å setje opp tabellane saman med rett endelig svar.
Merknad: Er ein litt lat og van med tal kan ein raskt sjå

$$12.125 = 8 + 4 + 0.125 = 8 + 4 + \frac{1}{8} = 2^3 + 2^2 + 2^{-3} = 1100.001_2$$

Det er og ei fullgod løysing

Oppgave 4. Vi har gjeve differenslikninga

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1, \quad x_0 = 0.$$

Prov ved induksjon at $x_n \leq 1$ for alle heiltal $n \geq 0$.

(Framhald på side 6.)

Løysing. Vi skal prove $P_n:\ x_n < 1$ for $n \geq 0$. Fyrst synar vi P_0
$P_0:\ x_0 < 1$ er rett avdi $x_0 = 0$ er gjeve som startverde.

Så må vi prove at P_n gir P_{n+1} for $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}.$$

Når $n \geq 1$ er $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$ og $x_{n+1} \leq 1$. Men, vi har nå bare vist induksjonen frå $n = 1$. Vi må sjå på x_1

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{0+1} \leq \frac{0}{2} + \frac{1}{1} = 1 \leq 1.$$

Da har vi prova $x_n \leq 1$ for $n \geq 0$.
Her provar vi faktisk både $x_0 \leq 1$ og $x_1 \leq 1$ særskild og nyttar induksjon for $x_2 \leq 1$, $x_3 \leq 1$...

Oppgave 5. Vi har gjeve differensiallikninga

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = \gamma,$$

der vi antek at $x > 0$. For kva for eit verde av γ vil $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$?

Løysing. Vi må løyse likninga før vi kan finne γ. Likninga er lineær og av orden 1. Forma er $y' + fy = g$, med $f(x) = -1/x$ og vi har integrerande faktor

$$e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = 1/x.$$

Vi treng berre éin faktor og kan gløyme integrasjonskonstant og talverditekn på x. Resten er lett

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)' &= \frac{1}{x^3} \\ \frac{y}{x} &= -\frac{1}{2x^2} + C \\ y &= -\frac{1}{2x} + Cx \end{aligned}$$

Kravet $y(1) = \gamma$ gir $-\frac{1}{2} + C = \gamma$ og $C = \gamma + \frac{1}{2}$. Løysinga blir

$$y = -\frac{1}{2x} + (\gamma + \frac{1}{2})x.$$

Fyrste leddet går mot 0, men ein konstant ganger x går mot $\pm\infty$, med mindre konstanten er null. Skal $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ må $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Oppgave 6. Vi har gjeve ein funksjon $f(x) = x^{\beta}$, der β er eit positivt, reelt tal. Likninga $f(x) = 0$ har naturlegvis løysinga $x = 0$, men vi ønsker å bruka den til ein test av Newtons metode.

a) Vi nyttar Newtons metode på likninga $f(x) = 0$ med startverde $x_0 = a$ der $a > 0$. Prov at Newtons metode konvergerar for alle $\beta \geq 1$. Kva skjer når $\beta = 1/2$?

(Framhald på side 7.)

b) Vi veljer $a = 1$ og $\beta = 4$. Kor mange iterasjonar må vi nytta for at feilen skal bli mindre enn 0.001?

Løysing. (a) Formelarket seier

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

For $f(x) = x^\beta$ har vi $f(x) = \beta x^{\beta-1}$ og

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^\beta}{\beta x_n^{\beta-1}} = x_n - \frac{x_n}{\beta} = \frac{\beta-1}{\beta} x_n.$$

Vi ser at x_{n+1} er ein konstant ganger x_n. Når $\beta = 1$ blir $x_1 = 0$ og løysinga er funne eksakt (For $\beta = 1$ er $f(x)$ lineær). For $\beta > 1$ blir x_n positiv for alle n og vi finn

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) x_0 & = & \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) a \\ x_2 & = & \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) x_1 & = & \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^2 a \\ ... & = & ... & = & ... \\ x_n & = & ... & = & \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^n a \end{array}$$

Sidan $(\beta - 1)/\beta < 1$, for $\beta > 1$, er $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ og Newtons metode konvergerar siden løysinga er 0.
For $\beta = 1/2$ er $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ og vi finn $x_1 = -a < 0$. Men da kan vi ikkje rekne ut $f(x_1) = \sqrt{-a}$ (rota av eit negativt tal) og metoden stoppar.

(b) Feilen er x_n sjølv, sidan løysinga er $x = 0$. Vi må ha

$$0.001 > x_n = \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^n a = (0.75)^n$$

$$\ln(0.001) > \ln\left((0.75)^n\right) = n\ln(0.75)$$

Avdi $\ln(0.75) < 0$ må vi snu *ulikheten* når vi delar på $\ln(0.75)$

$$n > \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.75)} = 24.01...$$

Da n berre kan ha heile verde blir løysinga $n = 25$.
Merknad: for $\beta > 1$ er ikkje krava for konvergenssatsane i Kalkulus stetta.

Lykke til og god jul!