UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 7. desember 2007.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 7 flervalgsoppgaver som teller 4 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 6 delspørsmålene 12 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet (av grad større enn 1) til fuksjonen $x \cos x$ er

☐ 1 ☐ 1/2 ☐ 2 ☒ 0 ☐ −1/2

Oppgave 2. Uttrykket $Ce^x - 1$, med vilkårlig C, er en løsning av

☐ $y' - y = 0$, $y(0) = 1$

☒ $y' - y = 1$

☐ $y'' + y' = 2e^x$

☐ $y' + 1 - y^2 = 0$

☐ $y' = e^x$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. En av likningene under er separabel. Hvilken ?

☐ $y' + \sin x\, y = x$

☐ $y' + y^2 + x = x^2$

☒ $xy' + e^x y^{1/2} = 0$

☐ $y' + y = \sin x$

☐ $y' + 1/y = 2x$

Oppgave 4. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = (1+x)^{-1}$ med polynomer av andre grad i intervallet $[0,1]$ ved å kreve likhet i punktene $x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1$. Det interpolerende polynomet kan da skrives

☐ $1 - x + x^2$

☐ $1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2$

☐ $(x-1)(x-\frac{1}{2})x$

☐ $\frac{1}{2}x + x^2$

☒ $1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}x^2$

Oppgave 5. I standard prosedyre for løsning av den lineære differensial-likningen

$$y' + \tan x\, y = x^2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

finner vi den integrerende faktoren

☒ $1/\cos x$ ☐ $e^{\cos x}$ ☐ $\sin x$ ☐ $e^{\tan x}$ ☐ $e^{\frac{1}{3}x^2}$

Oppgave 6. I en tekstfil forekommer det tre forskjellige tegn, kodet med en av metodene for representasjon av tekst som vi har i dette kurset. Det viser seg at det ene tegnet blir representert med en byte, det andre med to bytes, det tredje med tre bytes. Hvilket av følgende punkter er riktig?

☐ Tegnene kan ha vært kodet med ASCII

☒ Tegnene kan ha vært kodet med UTF-8

☐ Tegnene kan ha vært kodet med UTF-16

☐ Tegnene kan ha vært kodet med UTF-32

☐ Tegnene kan ha vært kodet med ISO-latin1

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Vi tilnærmer den andrederiverte til funksjonen $f(x)$, i punktet 0, med uttrykket

$$D_2 f(0) = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}.$$

Vi antar at f er uendelig mange ganger deriverbar. Da er feilen

$$\left| f''(0) - D_2 f(0) \right|,$$

begrenset av

☐ $\frac{h^2}{12} \max_{x\in[-h,h]} \left| f''(x) \right|$

☐ $\frac{h^2}{48} \max_{x\in[-h,h]} \left| f^{(4)}(x) \right|$

☐ $\frac{h}{4} \max_{x\in[-h,h]} \left| f''(x) \right|$

☒ $\frac{h^2}{12} \max_{x\in[-h,h]} \left| f^{(4)}(x) \right|$

☐ $\frac{h^4}{8} \max_{x\in[-h,h]} \left| f''(x) \right|$

Kommentarer til flervalgsdel

Oppgave 1:Her står det ikke eksplisitt angitt hvilket punkt, som regel kalt a, Taylorpolynomet utvikles om, selv om x^2 i teksten peker mot null. På eksamen ble det kunngjort at $a = 0$.

Oppgave 3: Alternativ 3 kan skrives om til $y^{-\frac{1}{2}} y' = -x^{-1} e^x$

Oppgave 5: For $y' + fy = g$ er faktoren e^F der $F' = f$. Her blir da $F = \int \tan x dx = -\ln|\cos x|$. Siden $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ er cosinus positiv og $F = -\ln \cos x = \ln(1/\cos x)$. Faktoren blir da $e^F = 1/\cos x$. Dernest kan vi sjekke at venstresiden, etter mulitiplaksjon, faktisk blir den deriverte av $y/\cos x$.

Oppgave 7: (Oppgave 9.11 i kompendium). Benytter Taylorpolym med restledd. Siden vi skal tilnærme den andrederiverte bør feilen inneholde en derivert av høyere orden enn dette. Ut fra alternativene antar vi at denne ordenen er 4.

$$\begin{array}{lllllll}
f(h) & = & f(0) + f'(0)h & +\frac{1}{2}f''(0)h^2 & +\frac{1}{6}f'''(0)h^3 & +\frac{1}{24}f^{(4)}(c_+)h^4 \\
-2f(0) & = & -2f(0) & & & \\
+f(-h) & = & f(0) - f'(0)h & +\frac{1}{2}f''(0)h^2 & -\frac{1}{6}f'''(0)h^3 & +\frac{1}{24}f^{(4)}(c_-)h^4 \\
\hline
f(h) - 2f(0) + f(-h) & = & & f''(0)h^2 & & +\frac{h^4}{24}(f^{(4)}(c_+) + f^{(4)}(c_-))
\end{array}$$

Nå følger

$$\left| f''(0) - D_2 f(0) \right| = \frac{h^4}{24} \left| f^{(4)}(c_+) + f^{(4)}(c_-) \right| \le \frac{h^4}{24} \left(\left| f^{(4)}(c_+) \right| + \left| f^{(4)}(c_-) \right| \right) \le \frac{h^2}{12} \max_{x\in[-h,h]} \left| f^{(4)}(x) \right|,$$

Merknad:
Dette er jo et "konservativt" estimat. Kan ikke alternativ 2 også være riktig ? Nei, estimatet skal gjelde også for, feks., $f = (x+1)^4$ som har konstant fjerdederivert. Da er ulikheten ovenfor en likhet og det strengere alternativ 2 kan ikke være rett.

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1. Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Løsning. Likningen er lineær med konstante koeffisienter. Videre er høyresiden en eksponentialfunksjon som kan håndteres med regel 2 i ubestemte koeffisienters metode. Her går vi fram på standard måte.
Homogenløsning
Den karakteristiske likningen er

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

med røttene $r_1 = 1$ og $r_2 = 2$ (Tilfelle 1). Homogenløsningen er da

$$y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^x + Be^{2x},$$

der A og B er konstanter som ennå ikke er bestemt.
Partikulærløsning
Vi ser at høyresiden har samme form som en av homogenløsningene. Da må vi høyne graden på polynomet foran eksponentialfunksjonen med 1. Dvs. vi setter inn

$$y_p = Cxe^x.$$

Vi merker oss at det har ingen hensikt a ta med et ledd De^x da dette er en homogenløsning og vil forsvinne ved innsetting. Først utregning av deriverte

$$\begin{aligned} y_p' &= (Cxe^x)' = C(e^x + xe^x) = C(1+x)e^x, \\ y_p'' &= C((1+x)e^x)' = C(e^x + (1+x)e^x) = C(2+x)e^x, \end{aligned}$$

deretter setter vi inn i differensiallikningen

$$\begin{aligned} e^x &= y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (Cxe^x)' = C(2+x)e^x - 3C(1+x)e^x + 2Cxe^x \\ &= C\left(2 - 3 + x(1 - 3 + 2)\right)e^x = -Ce^x. \end{aligned}$$

Koeffisienten blir altaå $C = -1$ og den fulle løsning har formen

$$y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} - xe^x.$$

Tilpasning av initialbetingelser A og B bestemmes fra

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) &= A + B \\ 1 &= y'(0) &= A + 2B - 1 \end{aligned}$$

Den øverste gir $B = -A$ som innsatt i den nedre gir $1 = A + 2B - 1 = -A - 1$, dvs. $A = -2$. Den fulle løsning

$$y = 2e^{2x} - 2e^x - xe^x$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi foreta Huffman koding av teksten

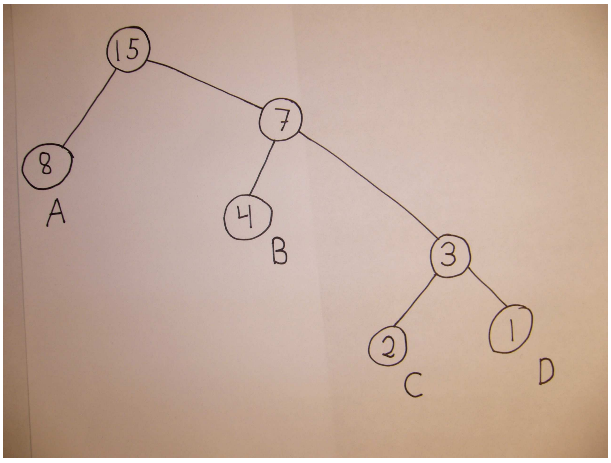
$$\{AACABABABCABADA\}$$

Regn ut frekvensene for de fire symbolene i teksten, og sett opp et Huffmantre for symbolene. Skriv til slutt opp Huffmankoden for teksten.

Løsning.
Frekvensene

Symbol	A	B	C	D
Frekvens	8	4	2	1

Først definerer vi hvert symbol som en-nodes trær. Vi knytter deretter hele tiden sammen de to trærne som har lavest total frekvens. Først C og D som får samlet vekt 3, dette knyttes så til B og tilslutt til A.



Følger vi grenene og setter 1 når vi går til høyre og 0 når vi går til venstre, finner vi kodene

α	A	B	C	D
$c(\alpha)$	0	10	110	111

og den totale koden for teksten: 0 0 110 0 10 0 10 0 10 110 0 10 0 111 0

Oppgave 3. Vis ved induksjon

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{for} \quad n \geq 1$$

Løsning.
Induksjonsgrunnlag
Viser formelen for $n = 1$

$$\text{venstreside :} \quad \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{høyreside :} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

(Fortsettes på side 6.)

Induksjonssteg
Skal vise at påstand for n

$$\mathrm{p}_n: \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

medfører påstand for $n+1$

$$\mathrm{p}_{n+1}: \quad \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad *$$

Begynner med sum i p_{n+1}:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2,$$

Bruker så p_n

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \tfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Det siste utrykket er lik det i $*$ fordi $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$ og induksjonssteget er fullført.

Oppgave 4. Vi har gitt en differensialligning av andre orden med initialbetingelser

$$y'' - f(x)y' - g(x)y = 0, \ x \geq 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

der f og g er gitte funksjoner. Gjør om denne likningen til et sett av to førsteordenslikninger. Vi skal benytte Eulers midtpunktmetode for dette settet. Beskriv hvordan vi går ett steg fram, for eksempel fra $x = 0$ til $x = h$.

Løsning. Vi gjør om likningene til første orden ved å innføre $z = y'$ som ny ukjent. Setter vi inn z for y' og z' for y'' i differensiallikningen får vi likningsettet

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= f(x)z + g(x)y \end{aligned}$$

Initialbetingelsene blir $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.
Vi innfører nå et skritt h, definerer $x_n = nh$ og søker tilnærmelser $y_n \approx y(x_n)$, $z_n \approx z(x_n)$. Fra initialbetingelsene finner vi

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 1$$

Når vi skal skritte fram fra $x_0 = 0$ til $x_1 = h$ ved Eulers midtpunktmetode bruker vi først Eulers metode et halvt skritt fram for å finne midlertidige verdier $\hat{y}$ og $\hat{z}$.

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\hat{y}-y_0}{\frac{1}{2}h} &= z_0 \\ \tfrac{\hat{z}-z_0}{\frac{1}{2}h} &= f(x_0)z_0 + g(x_0)y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{y} &= y_0 + \tfrac{1}{2}hz_0 \\ \hat{z} &= z_0 + \tfrac{1}{2}h\{f(x_0)z_0 + g(x_0)y_0\} \end{aligned}\right.$$

(Fortsettes på side 7.)

$\hat{y}$ og $\hat{z}$ tilnærmer nå de ukjente i midtpunktet av intervallet $[x_0, x_1]$ og kan brukes i en slags midtpunktformel

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{y_1-y_0}{h} & = & \hat{z} \\ \frac{z_1-z_0}{h} & = & f(\frac{h}{2})\hat{z} + g(\frac{h}{2})\hat{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & y_0 + h\hat{z} \\ z_1 & = & z_0 + h\{f(\frac{h}{2})\hat{z} + g(\frac{h}{2})\hat{y}\} \end{array}\right.$$

Et viktig poeng her er at begge stegene gir esplisitte uttrykk.
Naturligvis kunne vi i stedet ha antatt at feks. y_{n-1} og z_{n-1} var kjent og beskrevet utregningen av y_n og z_n.

Oppgave 5. Vi er gitt funksjonen $f(x) = \cos(x^2)$.
a) Vis at $(x > 0)$

$$f(x) = T_7 f(x) + R_7 f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\cos(d)}{24}x^8,$$

der vi har utviklet om punktet $a = 0$ og der $0 \le d \le x^2$.
Hint: Du kan bruke Taylorpolynomet til $\cos(t)$.

b) Vi tilnærmer nå integralet $\int_0^h f(x)dx$ der $h > 0$. Vis at feilen ved å erstatte f med $T_7 f$ i integralet er begrenset av

$$\left|\int_0^h f(x)dx - \int_0^h T_7 f(x)dx\right| \le \frac{h^9}{216}.$$

Vis også at når $h \le 1$ er feilen minst $\frac{h^9}{432}$.

Løsning.
a) Vi finner Taylorpolynomet for $g(t) = \cos(t)$. Siden t her skal svare til x^2 holder det å regne ut $T_3 g$ og $R_3 g$

n	$g^{(n)}(t)$	$g^{(n)}(0)$
0	$\cos t$	1
1	$-\sin t$	0
2	$-\cos t$	-1
3	$\sin t$	0
4	$\cos t$	1

Bruker vi så Taylors formel med restledd (formelark) får vi

$$g(t) = T_3 g(t) + R_3 g(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{\cos(c)}{24}t^4,$$

der $0 \le c \le t$. Setter vi inn $t = x^2$ følger

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\cos(c)}{24}x^8,$$

der c, som ligger mellom 0 og $t = x^2$, nå kan identfiseres med d. De to første leddene må svare til $T_7 f$, noe som kan bekreftes ved en direkte utregning av T_7 (det er lett å innse feks. at alle odde ledd blir null fordi f er symmetrisk om $x = 0$). En direkte utregning vil derimot gi et annet og mer komplisert uttrykk for R_7, men vi har uansett vist at det kan skrives på formen over.

(Fortsettes på side 8.)

b)
Vi har at feilen, ϵ, er gitt ved

$$\epsilon = \Big|\int_0^h f(x)dx - \int_0^h T_7 f(x)dx\Big| = \Big|\int_0^h R_7 f(x)dx\Big|.$$

Nå følger ($h > 0$)

$$\epsilon = \Big|\int_0^h R_7 f(x)dx\Big| \leq \int_0^h \frac{|\cos(d)|}{24} x^8 dx \leq \int_0^h \frac{1}{24} x^8 dx = \frac{h^9}{24 \cdot 9} = \frac{h^9}{216},$$

der vi i første ulikhet bla.a. benytter at x er positiv, mens vi senere benytter $|\cos(d)| \leq 1$.
I det ekstra spørsmålet skal vi anta $h \leq 1$. Det betyr $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq d \leq 1$. $\cos d$ er da positiv ($\cos t$ bytter fortegn ved $t = \frac{\pi}{2} > 1.5$). Siden $\cos t$ er avtagende i intervallet $0 \leq t \leq \pi$ følger $\cos(d) \geq \cos(1) \geq \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, der vi har benyttet $\pi/3 > 1$. Nå kan vi finne en nedre avgrensning av feilen

$$\epsilon = \Big|\int_0^h R_7 f(x)dx\Big| = \int_0^h \frac{\cos(d)}{24} x^8 dx \geq \int_0^h \frac{\frac{1}{2}}{24} x^8 dx = \frac{h^9}{432},$$