UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 10. januar 2008.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 7 flervalgsoppgaver som teller 4 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 6 delspørsmålene 12 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Løsningsforslag

Merk at dette er et forslag til løsning. Flere av oppgavene kan løses på andre måter, og har du gjort det riktig får du fullt hus, selv om du ikke har brukt metoden jeg har vist her. Forøvrig gjelder det vanlige forbeholdet om trykkfeil.

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. For $0 < x < 1$ er $y(x) = \sin x$ en løsning av

- ☐ $y'' - y = 0$
- ☐ $y' - y = \sin x$
- ☐ $y'' + y = e^x$
- ☐ $y' + 1 - y^2 = 0$
- ☑ $y' \tan x - y = 0$

Løsning. Funksjonen $y(x) = \sin x$ passer kun i siste alternativ.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. Vi har gitt differensialligningen $y'' + y' + 2y = f(x)$. For en av høyresidene under kan vi ikke bruke ubestemte koeffisienters metode for å finne en partikulærløsning, hvilken?

- [ ] $f(x) = x^2 e^x$
- [x] $f(x) = x e^{x^2}$
- [ ] $f(x) = e^x \sin x$
- [ ] $f(x) = 1$
- [ ] $f(x) = \cos x$

Løsning. I det andre tilfellet fungerer ikke ubestemte koeffisienters metode siden graden på polynomet foran e^{x^2} øker hver gang vi deriverer.

Oppgave 3. For $x \geq 0$ har vi differensialligningen

$$y' = \frac{x}{y^2 + 1}, \quad y(0) = 0.$$

Hvilken sammenheng gjelder mellom x og løsningen $y = y(x)$?

- [ ] $y = x^2$
- [ ] $y = \sqrt{x^3/3 + x}$
- [ ] $x = y^2$
- [x] $x = \sqrt{2(y^3/3 + y)}$
- [ ] $y = \sqrt{x^2 + x}$

Løsning. Ligningen kan skrives $(y^2 + 1)y' = x$ og er derfor separabel. Integrasjon på begge sider gir

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{x^2}{2} + C,$$

og setter vi inn initialverdien $y(0) = 0$ ser vi at $C = 0$. Løser vi ligningen med hensyn på x får vi relasjonen i alternativ 4.

Oppgave 4. Vi har et tegnsett der hvert enkelt tegn representeres ved en byte. Hvor mange ulike tegn kan representeres ved hjelp av dette tegnsettet?

- [ ] 128
- [x] 256
- [ ] 8
- [ ] 255
- [ ] 127

Oppgave 5. I hvilket av følgende tegnsett krever den norske bokstaven 'ø' to bytes?

- [ ] ASCII
- [x] UTF-8
- [ ] ISO Latin1
- [ ] UTF-32
- [ ] ISO Latin2

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6. Anta at vi bruker trapesregelen til å beregne en tilnærming T til integralet $\int_0^1 f(x)\,dx$, og at vi ser bort fra avrundingsfeil. Da er $T = \int_0^1 f(x)\,dx$ hvis

- [ ] f er en vilkårlig parabel
- [ ] $f(x) = \sin x$
- [ ] $f(x) = e^x$
- [x] f er en vilkårlig rett linje
- [ ] f er et vilkårlig polynom av grad tre

Oppgave 7. Hvilket av følgende utsagn er sant?

- [ ] Halveringsmetoden er en numerisk metode for å løse differensialligninger
- [ ] Eulers metode er vanligvis mer nøyaktig enn Eulers midtpunkmetode
- [x] Runge Kuttas metode av fjerde orden er mer nøyaktig enn Eulers metode
- [ ] Differensligninger er et spesialtilfelle av differensialligninger
- [ ] Avrundingsfeil skaper aldri problemer ved numerisk løsning av differensialligninger

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1. Løs differenslikningen med initialbetingelser

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3^n, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Løsning. Vi løser først den homogene ligningen. Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 4r + 4$ som har en dobbel rot i $r = 2$. Dermed vet vi at den generelle løsningen til den homogene ligningen er

$$y_n^h = (C + Dn)2^n.$$

For å finne en partikulær løsning prøver vi med en løsning på samme form som høyresiden, $y_n^p = A3^n$, der A er en vilkårlig konstant som skal bestemmes. Setter vi inn i differensligningen får vi

$$3^n = A3^{n+2} - 4A3^{n+1} + 4A3^n = 3^n(9A - 12A + 4A) = 3^n A.$$

Skal dette holde for alle mulige verdier av n må vi ha $A = 1$. Dermed er den generelle løsningen

$$y_n = y_n^h + y_n^p = (C + Dn)2^n + 3^n.$$

Til slutt må vi tilpasse løsningen til initialverdiene. Vi har $0 = y_0 = C + 1$, så $C = -1$. Fra $y_1 = 1$ får vi $1 = y_1 = (-1 + D)2 + 3 = 2D + 1$ som gir $D = 0$. Dermed er løsningen $y_n = 3^n - 2^n$.

Oppgave 2. Løs differensialligningen

$$y' + xy = x, \quad y(0) = 2.$$

Løsning. Siden $\int x\,dx = x^2/2$ er den integrerende faktoren $e^{x^2/2}$. Multipliserer vi med denne på begge sider får vi

$$e^{x^2/2}y' + xe^{x^2/2}y = \big(e^{x^2/2}y\big)' = xe^{x^2/2}.$$

Ligningen kan så løses ved å integrere på begge sider. Integralet på høyre side blir

$$\int xe^{x^2/2}\,dx = e^{x^2/2} + C$$

der C er en konstant (om nødvendig kan dette gjøres ved substitusjonen $u = x^2/2$). Dermed har vi $e^{x^2/2}y = e^{x^2/2} + C$ slik at den generelle løsningen er

$$y(x) = 1 + Ce^{-x^2/2}.$$

Setter vi inn initialverdien $y(0) = 2$ får vi da $2 = y(0) = 1 + C$ så $C = 1$. Altså er løsningen

$$y(x) = 1 + e^{-x^2/2}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 3. Vi har differensligningen $x_{n+1} = (n+1)x_n + 2$, der $x_1 = 1$. Vis ved induksjon på n at $x_n \geq n!$ for alle naturlige tall n.

Løsning. Vi har $x_1 = 1 = 1!$ så påstanden er opplagt sann for $n = 1$.
Anta nå at $x_k \geq k!$ for en $k \geq 1$, vi må vise at da er også $x_{k+1} \geq (k+1)!$. Vi har

$$x_{k+1} = (k+1)x_k + 2 \geq (k+1)k! + 2 = (k+1)! + 2 \geq (k+1)!.$$

Dermed holder påstanden også for $n = k+1$.

Oppgave 4. Vi har teksten $\boldsymbol{x} = AAAABAAAAA$.

a) Regn ut sannsynligheten til A og B basert på teksten $\boldsymbol{x}$.
Anta at vi forsøker å kode teksten med Huffman-koding basert på disse sannsynlighetene, hvor mange bit vil vi da i gjennomsnitt trenge for hvert symbol?

Løsning. Vi ser at A forekommer 9 ganger og B en gang så $p(A) = 0.9$ mens $p(B) = 0.1$.
Siden vi bare har to symboler kan ikke Huffman koding gi kortere koder enn ett bit til A og ett bit til B, altså $c(A) = 0$ og $c(B) = 1$. Altså blir det gjennomsnitlige antall bit pr. symbol 1.

b) Vi skal nå kode teksten ved hjelp av aritmetisk koding basert på sannsynlighetene fra (a). Vi assosierer A med det delintervallet av $[0, 1)$ som ligger lengst til venstre.
Vis at etter at de fem første tegnene er kodet vet vi at den aritmetiske koden ligger i intervallet $[0.59049, 0.6561)$.
Finn også et intervall som inneholder den endelige aritmetiske koden.

Løsning. Fra oppgaveteksten ser vi at A skal assosieres med intervallet $[0, 0.9)$ og B med intervallet $[0.9, 1)$. De fire første symbolene er A så intervallet vi danner i hvert steg vil være de første 90 % av det foregående intervallet. Altså vil vi etter fire symboler ha intervallet $[0, 0.9^4) = [0, 0.6561]$. Det neste symbolet er B så det neste intervallet skal være intervallet som utgjør de siste 10 % av dette intervallet, altså

$$[0.9^4 - 0.1 \times 0.9^4, 0.9^4) = [0.9^5, 0.9^4) = [0.59049, 0.6561).$$

Legg merke til at bredden på dette intervallet er $0.9^4 - 0.9^5 = 0.9^4 \times 0.1$.
De fem neste symbolene er alle A så vi skal hver gang danne et intevall som er gitt ved de første 90 % av foregående intervall. Det betyr at venstre endepunkt vil forbli uendret, mens bredden på intervallet forminskes med en faktor på 0.9 hver gang. Det høyre endepunktet blir derfor

$$0.9^5 + 0.9^4 \times 0.1 \times 0.9^5 = 0.9^5 + 0.9^9 \times 0.1 = 0.629232.$$

Den aritmetiske koden må derfor ligge i intervallet $[0.59049, 0.629232)$.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 5. Finn Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = (x+b)^n$ om $x = 0$ av grad n og bruk dette til å bevise binomialformelen.

Løsning. For å finne Taylorpolynomet trenger vi alle de deriverte til f i $x = 0$. Vi finner

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+b)^n, & f(0) &= b^n,\\
f'(x) &= n(x+b)^{n-1}, & f'(0) &= nb^{n-1},\\
f''(x) &= n(n-1)(x+b)^{n-2}, & f''(0) &= n(n-1)b^{n-2},\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(k)}(x) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+b)^{n-k}, & f^{(k)}(0) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)b^{n-k},\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= n!, & f^{(n)}(0) &= n!,
\end{aligned}
$$

mens alle de høyere deriverte er identisk lik 0. Fra dette ser vi at Taylorpolynomet til f av grad n er identisk lik f (restleddet er null),

$$(x+b)^n = T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} b^{n-k} x^k.$$

For å få dette på samme form som binomialformelen multipliserer vi med $(n-k)!$ over og under brøkstreken,

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

ut fra definisjonen av binomialkoeffisientene. Dermed har vi

$$(x+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k b^{n-k}$$

som vi gjenkjenner som binomialformelen.

Lykke til!