

13. oktober, 2008

MAT-INF 1100: Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: 31/10-2008, kl. 14:30

Informasjon

Den skriftlige besvarelsen skal leveres på ekspedisjonskontoret i 7. et. i Niels Henrik Abels hus senest *kl. 14.30 fredag 31/10*. Besvarelsen *skal* være skrevet av deg selv, for hånd eller på datamaskin. Programmet i oppgave 2d leveres som utskrift fra skriver. Pass på at besvarelsen er ryddig ført og oppgavene skrevet i riktig rekkefølge slik at den som retter finner og forstår alt som blir levert.

Studenter som blir syke eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse for denne obligatoriske oppgaven, må ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. et. Niels Henrik Abels hus, telefon 22 8558 88, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

Det oppfordres til samarbeid underveis i arbeidet med oppgavene, og gruppelærerne har anledning til å svare på generelle spørsmål, men kan ikke servere ferdige løsninger. *Den endelige besvarelsen som du leverer skal utarbeides av deg selv, og du må kunne redegjøre for innholdet ved en eventuell muntlig høring (aktuelt ved mistanke om avskrift).*

Husk at de to obligatoriske oppgavene i MAT-INF 1100 begge må bestås for å kunne gå opp til endelig eksamen i kurset. *For å få bestått på denne andre obligatoriske oppgaven må du gjøre seriøse løsningsforsøk på alle oppgavene, og minst seks av de ti deloppgavene bør være riktig besvart.*

Hvis du har samarbeidet nært med noen, er det fint om du skriver vedkommendes navn her:

Oppgaver

Oppgave 1. Ved hjelp av en numerisk metode har vi løst en differensialligning som beregner farten v til et objekt som faller mot jorden. Resultatet er en følge av tilnærminger $(t_i, v_i)_{i=0}^N$ til løsningen, der $t_i = ih$ for en passende verdi h .

- Gi en metode (bruk gjerne samme form som på algoritmene i kompendiet) for å beregne en tilnærming til objektets aksellerasjon $a(t) = v'(t)$ ut fra de beregnede verdiene (t_i, v_i) av farten.
- Gi en metode for å beregne en tilnærming til objektets høyde over havet $y(t)$ ut fra de beregnede verdiene når $v(t) = y'(t)$ og $y(0) = a$.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal du effektivisere trapesmetoden. Du skal utføre numerisk integrasjon med trapesmetoden på intervallet $[a, b]$ ved å beregne en følge av tilnærminger I_0, I_1, I_2, \dots . For tilnærming I_n skal $[a, b]$ deles i 2^n like store deler, funksjonen f tilnærmes med sekanten på hvert delintervall, og integralet av f tilnærmes ved hjelp av integralet av sekanten.

- Vis at dette gir

$$I_n = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^n - 1} f(a + ih) \right), \quad (1)$$

den såkalte trapesregelen.

- Noen av funksjonsverdiene som inngår i beregningen av I_n inngår også i beregningen av I_{n-1} , forklar hvilke disse er.
- La h være steglengden ved beregning av I_n . Forklar hvorfor

$$I_n = \frac{I_{n-1}}{2} + h \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + (2i - 1)h). \quad (2)$$

Hvordan kan denne formelen utnyttes til å unngå å beregne funksjonsverdier på nytt når vi regner ut I_1, I_2, \dots ?

- På fila `trapes.py` finner du et Python-program som beregner en tilnærming til $\int_0^1 \cos x \, dx$ med relativ feil mindre enn 10^{-12} , basert på formelen (1). Skriv om programmet slik at det utnytter formelen (2). Hvor mye raskere går det nye programmet?

Oppgave 3. Vi har differensialligningen

$$x' - x^2 = 1, \quad x(0) = 1. \quad (3)$$

- a) Finn løsningen $x(t)$ av differensialligningen analytisk. (Hint: Ligningen er separabel.)
- b) Løs ligningen numerisk på intervallet $[0, 0.6]$ ved å ta 6 steg med Eulers metode (med kalkulator eller datamaskin). Plott den numeriske løsningen sammen med den eksakte løsningen (for hånd eller ved hjelp av datamaskin).
- c) Gjenta (b), men bruk Eulers midtpunktmetode i stedet for Euler's metode. Plott den numeriske løsningen du nå får sammen med løsningene du plottet i (b).
- d) Et alternativ til de to metodene over er som følger. Anta at vi skal løse $x' = f(t, x)$. Den nye metoden er basert på at steget fra tilnærmingen (t_k, x_k) til tilnærmingen (t_{k+1}, x_{k+1}) beregnes ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k + h/2, (x_{k+1} + x_k)/2).$$

For ligningen (3) gir dette

$$x_{k+1} = x_k + h \left(1 + \frac{(x_k + x_{k+1})^2}{4} \right). \quad (4)$$

Denne ligningen kan løses med hensyn på x_{k+1} , noe som gir

$$x_{k+1} = \frac{2 - hx_k - 2\sqrt{1 - h^2 - 2x_k h}}{h} \quad (5)$$

Lag en metode som beregner x_{k+1} ved hjelp av denne formelen. Er det noen begrensninger på hvilken h som kan brukes?

Gjør 6 steg som for de andre metodene, og legg også denne løsningen inn i det samme plottet som de andre løsningene. Hvilken metode ser ut til å fungere best?

- e) (Frivillig.) Ligningen (4) har to løsninger, og i (5) plukker vi ut en av disse. Forklar hvorfor vi ikke velger den andre løsningen.

Lykke til!!