Ekstraoppgaver
MAT-INF 1100 høsten 2008
uken 13/10-17/10

Knut Mørken

21. oktober 2008

Oppgave 1. Ensidig tilnærming til den deriverte. Denne oppgaven gir en mulighet til å øve på teknikken med å utlede en tilnærming til den deriverte, utlede feilformel og avrundingsfeil, og finne fram til optimal h. Bruk seksjon 11.1 som mal for å løse oppgaven.

Anta at vi måler verdiene til en funksjon $f(x)$ ved jevne mellomrom 0, h, $2h$, ..., og at vi skal estimere den deriverte til f i disse punktene. I denne oppgaven skal vi utlede en tilnærming i et punkt a som bruker to verdier til venstre for a samt verdien i a. Dette er nyttig når x angir tid siden vi da ikke har framtidige verdier tilgjengelige når vi skal regne ut den deriverte.

a) Anta at verdiene til f i $a-2h$, $a-h$ og a er kjent. Finn det kvadratiske polynomet p_2 som interpolerer f i disse punktene (bruk newtonformen). Vi bruker $p_2'(a)$ som en tilnærming til $f'(a)$. Vis at dette gir
$$f'(a) \approx p_2'(a) = \frac{3f(a) - 4f(a-h) + f(a-2h)}{2h}$$

b) Bruk den vanlige teknikken med taylorutvikling til å vise at trunkeringsfeilen kan begrenses av
$$\left| f'(a) - \frac{3f(a) - 4f(a-h) + f(a-2h)}{2h} \right| \le h^2 \max_{x\in[a-2h,a]} \left| f'''(x) \right|.$$

c) Bruker vi 64-bits flyttall på datamaskin får vi flyttallene $\overline{f(a)}$, $\overline{f(a+h)}$ og $\overline{f(a-2h)}$ istedenfor de eksakte verdiene $f(a)$, $f(a-h)$ og $f(a-2h)$, der

$$\begin{aligned}\overline{f(a)} &= f(a)(1+\epsilon_1),\\ \overline{f(a-h)} &= f(a-h)(1+\epsilon_2),\\ \overline{f(a-2h)} &= f(a-2h)(1+\epsilon_3).\end{aligned}$$

Her er $|\epsilon_i| \leq \epsilon^*$ for $i = 1, 2, 3$, og du kan regne med at ϵ^* er omtrent 7×10^{-17}. Vis at feilen i det beregnede estimatet for den deriverte er begrenset av

$$\left| f'(a) - \frac{3\overline{f(a)} - 4\overline{f(a-h)} + \overline{f(a-2h)}}{2h} \right| \leq h^2 M_1 + 4\frac{\epsilon^*}{h} M_2$$

der

$$M_1 = \max_{x\in[a-2h,a]} \left|f'''(x)\right|, \quad M_2 = \max_{x\in[a-2h,a]} |f(x)|.$$

Finn den verdien h^* av h som gjør estimatet for den totale feilen minst mulig.

d) Anta nå at $f(x) = \sqrt{x}$ og at $a = 2$. Finn en tilnærming til den deriverte med metoden i (a) med den optimale verdien h^* av h som du fant i (c) (erstatt M_1 med tilnærmingen $|f'''(a)|$ og M_2 med tilnærmingen $|f(a)|$). Regn ut den virkelige feilen ved å sammenligne med

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35355339059327376220$$

(e) Bruk prøving og feiling til å bestemme, med ett siffers nøyaktighet, den h-verdien som gjør den virkelige feilen minst mulig. Bruk gjerne kalkulator. Finn ut fra dette et estimat for ϵ^* for eksempelet i denne oppgaven og beregningsplatformen du har brukt.

Oppgave 2. Numerisk integrasjon. De numeriske integrasjonsformlene vi har utledet har alle den egenskapen at de er eksakte når $f(x) = c$, der c er et reelt tall. Anta at vi har en generell integrasjonsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

der $\{x_i\}_{i=1}^n$ er distinkte tall i $[a, b]$ og koeffisientene $\{w_i\}_{i=1}^n$ er reelle tall. Vis at dersom formelen er eksakt når $f(x) = c$ så er

$$\sum_{i=1}^n w_i = b - a.$$