

Ekstraoppgaver

MAT-INF 1100 høsten 2009

Knut Mørken

7. oktober 2009

Oppgave 1. Ensidig tilnærming til den deriverte. Denne oppgaven gir en mulighet til å øve på teknikken med å utlede en tilnærming til den deriverte, utlede feilformel og avrundingsfeil, og finne fram til optimal h . Bruk seksjon 11.1 som mal for å løse oppgaven.

Anta at vi mäter verdiene til en funksjon $f(x)$ ved jevne mellomrom $0, h, 2h, \dots$, og at vi skal estimere den deriverte til f i disse punktene. I denne oppgaven skal vi utlede en tilnærming i et punkt a som bruker to verdier til venstre for a samt verdien i a . Dette er nyttig når x angir tid siden vi da ikke har framtidige verdier tilgjengelige når vi skal regne ut den deriverte.

- Anta at verdiene til f i $a - 2h, a - h$ og a er kjent. Finn det kvadratiske polynomet p_2 som interpolerer f i disse punktene (bruk newtonformen). Vi bruker $p'_2(a)$ som en tilnærming til $f'(a)$. Vis at dette gir

$$f'(a) \approx p'_2(a) = \frac{3f(a) - 4f(a - h) + f(a - 2h)}{2h}$$

- Bruk den vanlige teknikken med taylorutvikling til å vise at trunkeringsfeilen kan begrenses av

$$\left| f'(a) - \frac{3f(a) - 4f(a - h) + f(a - 2h)}{2h} \right| \leq h^2 \max_{x \in [a-2h, a]} |f'''(x)|.$$

- Bruker vi 64-bits flyttall på datamaskin får vi flyttallene $\overline{f(a)}, \overline{f(a+h)}$ og $\overline{f(a-2h)}$ istedenfor de eksakte verdiene $f(a), f(a-h)$ og $f(a-2h)$, der

$$\begin{aligned}\overline{f(a)} &= f(a)(1 + \epsilon_1), \\ \overline{f(a-h)} &= f(a-h)(1 + \epsilon_2), \\ \overline{f(a-2h)} &= f(a-2h)(1 + \epsilon_3).\end{aligned}$$

Her er $|\epsilon_i| \leq \epsilon^*$ for $i = 1, 2, 3$, og du kan regne med at ϵ^* er omtrent 7×10^{-17} . Vis at feilen i det beregnede estimatet for den deriverte er begrenset av

$$\left| f'(a) - \frac{3\overline{f(a)} - 4\overline{f(a-h)} + \overline{f(a-2h)}}{2h} \right| \leq h^2 M_1 + 4 \frac{\epsilon^*}{h} M_2$$

der

$$M_1 = \max_{x \in [a-2h, a]} |f'''(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [a-2h, a]} |f(x)|.$$

Finn den verdien h^* av h som gjør estimatet for den totale feilen minst mulig.

- d) Anta nå at $f(x) = \sqrt{x}$ og at $a = 2$. Finn en tilnærming til den deriverte med metoden i (a) med den optimale verdien h^* av h som du fant i (c) (erstatt M_1 med tilnærmingen $|f'''(a)|$ og M_2 med tilnærmingen $|f(a)|$). Regn ut den virkelige feilen ved å sammenligne med

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35355339059327376220$$

- (e) Bruk prøving og feiling til å bestemme, med ett sifvers nøyaktighet, den h -verdien som gjør den virkelige feilen minst mulig. Bruk gjerne kalkulator. Finn ut fra dette et estimat for ϵ^* for eksempelet i denne oppgaven og beregningsplataformen du har brukt.

Oppgave 2. Numerisk integrasjon. De numeriske integrasjonsformlene vi har utledet har alle den egenskapen at de er eksakte når $f(x) = c$, der c er et reelt tall. Anta at vi har en generell integrasjonsformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

der $\{x_i\}_{i=1}^n$ er distinkte tall i $[a, b]$ og koeffisientene $\{w_i\}_{i=1}^n$ er reelle tall. Vis at dersom formelen er eksakt når $f(x) = c$ så er

$$\sum_{i=1}^n w_i = b - a.$$