1.1.5

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}$

$-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^0 \left(-\frac{1}{3}\right)^1 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \left(-\frac{1}{3}\right)^5$

$$=\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^k}{3^k}$$

1.1.6 g)

$$\sum_{k=0}^{8}(2k+3)$$ (oddetall fra 3, til 19)

$$= \sum_{n=1}^{9}\left(2(n-1)+3\right) = \sum_{n=1}^{9}(2n-2+3) = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{9}(2n+1)}}$$

$n = k+1 \Leftrightarrow k = n-1$

1.2.5

P_n : $n^5 - n$ er delelig med 5

P_1 : $1^5 - 1 = 0$, som er delelig med 5.

Anta vi har vist $P_1, \dots, P_n$. Vi skal nå vise at også P_{n+1} er sann:

$$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \cancel{+1} - (n \cancel{+1})$$

$$= n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$$

$$= \underbrace{n^5 - n}_{\text{delelig med } 5} + \underbrace{5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{\text{delelig med } 5}$$

derfor er også $(n+1)^5 - (n+1)$ delelig med 5, slik at P_{n+1} også er sann.

1.2.10

a)

1	$=$	1	$n=1$
$1+3$	$=$	4	$n=2$
$1+3+5$	$=$	9	$n=3$
$1+3+5+7$	$=$	16	$n=4$
$1+3+5+7+9$	$=$	25	$n=5$

det n'te oddetallet:

$2k-1$

a) hypotese: $P_n: \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

b)

$P_1:$ $VS = 1$

$HS = 1$

anta $P_1, P_2, \dots, P_n$ er vist å være sanne. Vi viser P_{n+1}:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1)-1$$

$$= \underbrace{n^2}_{P_n} + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \Rightarrow$$ **P_{n+1} også sann**

1.2.11

$$f(x) = e^{x^2}$$

P_n: $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{x^2}$, med p_n et n-te grads pol.

P_1: $f'(x) = 2xe^{x^2} = p_1(x)e^{x^2}$, der $p_1(x) = 2x$ er et førstegradspolynom.

Anta vi har vist $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (dvs. at $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{x^2}$, p_n n'tegrad.)

P_{n+1}: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(p_n(x)e^{x^2}\right)'$

$= p_n'(x)e^{x^2} + p_n(x)2xe^{x^2}$ (derivert et produkt, kjerneregel)

$$= \Big(\underbrace{p_n'(x)}_{\text{grad } n-1} + \underbrace{2x\,p_n(x)}_{\text{grad } n+1}\Big)e^{x^2} = \underbrace{p_{n+1}(x)}_{\text{grad } n+1}e^{x^2}$$

som viser at P_{n+1} er sann (i siste overgang definerer jeg $p_{n+1}(x) := p_n'(x) + 2x\,p_n(x)$