1.4.8

a) Vi skal vise at $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}}$$

b) 2^n = totale antallet delmengder vi kan velge fra n elementer

$$= \sum_{k=0}^{n} (\text{antall delmengder med } k \text{ elementer}) \quad k^n = (1+1+\cdots+1)^n$$

$$= \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$$

2.1.9

Vi skal vise: $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$:

$$|x-y| = |x-z+z-y| = |(x-z)+(z-y)|$$

$$\overset{\text{trekantulikhet}}{\leq} \underline{|x-z| + |z-y|}$$

2.2.5

a) summen av to irrasjonale tall er alltid irrasjonalt?

Galt!

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \leftarrow$ rasjonalt

irrasjonale

b) a irrasjonalt $\Rightarrow$ $-a$ irrasjonalt?

Riktig!

Å anta for motsigelse at $-a$ er rasjonal.

Da er $a + (-a) = 0$ rasjonalt, men vi vet at summen av et rasjonalt og et irrasjonalt tall er irrasjonalt (Korollar 2.2.2). Motsigelse $\Rightarrow$ $-a$ er irrasjonalt.

c) a^2 rasjonal $\Rightarrow$ a rasjonal? Ikke nødvendigvis:

$a = \sqrt{2}$, $a^2 = 2$, er et moteksempel.

d) a^2 er irrasjonal $\Rightarrow$ a også irrasjonal? Riktig!

Hvis nemlig a var rasjonal, så ville a^2 også være rasjonal (Korollar 2.2.1)

e) Hvis a er irrasjonal, så er $\frac{1}{a}$ det også? Riktig!

(Hvis $\frac{1}{a}$ var rasjonal: $\frac{1}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = \frac{c}{b}$, som er rasjonal)

2.2.8

Anta: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ $\quad b = q_1 q_2 \cdots q_m$

$a^2 = p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$

a) $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \sqrt{2} b = a$

$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 \Leftrightarrow \underbrace{2 q_1 q_1 q_2 q_2 \cdots q_m q_m}_{VS} = \underbrace{p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n}_{HS}$

b) La r være antall tall blant $p_1, \ldots, p_n$ som er 2.

La s være antall tall blant $q_1, \ldots, q_m$ som er 2.

Antall 2-tall VS: $1 + 2s$ = oddetall

Antall 2-tall HS: $2r$ = partall

Det finnes derfor forskjellig antall 2-tall på høyre og venstre side.

c) Aritmetikkens fundamentalteorem sier at ethvert tall har en unik faktorisering i primtall, Spesielt vil tallet 2 forekomme like mange ganger i enhver primtallsfaktorisering. Her så vi at 2-tallet forekom forskjellig antall ganger, som er en selvmotsigelse $\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ er irrasjonalt

2.4.4

Definer 2 ved $2 = 1+1$. Vis at $a+a = 2a$

Vi skriver: $a+a \overset{A4}{=} a\cdot 1 + a\cdot 1$

$\overset{A3}{=} a\cdot(1+1) = a\cdot 2$

$\overset{A1}{=} 2\cdot a = 2a$

2.3.5

b) $\sup(A \cap B)$ = minimum av $\sup A$ og $\sup B$?

nei! moteksempel: $A \cap B = \emptyset$

$\sup(A \cap B)$ ikke definert., men $\sup A$, $\sup B$ er definert.

a) $\sup(A \cup B)$ = maks av $\sup A$ og $\sup B$?

ja: Fordi $\sup(A \cup B)$ antas i en av mengdene A eller B