Fasit til oppgaver dere har spurte om, som ikke ble tatt på plenumsregning

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

September 12, 2011

Oppgave 1.2.8

Vi skal vise at, for alle naturlige tall n,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

For $n = 1$ sier dette ar $1 > 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.82$, slik at hypotesen holder for $n = 1$. Anta så at vi har vist hypotesen for $k = 1, \ldots, n$. Vi skal vise at den også holder for $n + 1$, det vil si at

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{(n+1)+1} - 1) = 2\sqrt{n+2} - 2.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&> 2(\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Induksjonshypotesen er sann også for $n + 1$ hvis vi klarer å vise at

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} - 2.$$

Dette er det samme som at $2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2}$. Kvadrerer vi begge sider får vi at $4(n+1) + 4 + \frac{1}{n+1} > 4(n+2)$, som er det samme som at $\frac{1}{n+1} > 0$, som jo er riktig.

Oppgave 1.2.9

a)

Siden det står n tall i telleren og n tall i nevneren kan vi skrive

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \frac{1}{1}\frac{3}{2}\frac{5}{3}\cdots\frac{2n-1}{n} \leq 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2 = 2^n.$$

b)

For $0 < t < 1$ er begge sidene i ulikheten $\sqrt{1-t} \leq 1 - \frac{t}{2}$ positive. Det er derfor nok å vise at ulikheten holder når vi kvadrerer begge sider:

$$1 - t \leq 1 - t + \frac{t^2}{4}$$

men dette er det samme som at $\frac{t^2}{4} \leq 0$, som opplagt holder.

c)

Vi har at

$$\begin{aligned}
\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} &= \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1/2}{2}\right)\left(1-\frac{1/3}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1/n}{2}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}}\cdots\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdots\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

der vi har brukt ulikheten fra b) på alle n ledd bortsett fra det første, og der vi har forkortet alle ledd bortsett fra $\sqrt{n}$ i den siste overgangen.

Oppgave 2.1.10

Vi skal vise ved induksjon at

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|.$$

For $n = 1$ er dette opplagt, siden det da står det samme på venstre og høyre side. For $n = 2$ er det også opplagt, dette er jo ikke noen annet enn trekantulikheten. Anta nå at vi har vist hypotesen for $k = 1, \ldots, n$, og la oss vise at hypotesen også holder for $n + 1$, det vil si at

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{n+1}|.$$

Vi skriver

$$\begin{aligned}
|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}| &= |(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_{n+1}| \\
&\leq |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \\
&\leq (|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|) + |a_{n+1}| \\
&= |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{n+1}|,
\end{aligned}$$

der vi første brukte hypotesen for $n = 2$, deretter for n. Dette fullfører induksjonshypotesen.

Oppgave 2.2.9

Vi antar for motsigelse at $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, og setter $a = p_1 p_2 \ldots p_r$, $b = q_1 q_2 \ldots q_m$ som i Oppgave 2.2.8, der p_i, q_j alle er primtall. Kvadrerer vi uttrykket $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ og flytter over får vi

$$n q_1 q_1 q_2 q_2 \ldots q_m q_m = p_1 p_1 p_2 p_2 \ldots p_r p_r.$$

la $n = s_1 s_2 \ldots s_t$ være primtallsfaktoriseringen av n. Siden n ikke er et kvadrattall så finnes et primtall p som forekommer et odde antall ganger, $2u+1$, i primtallsfaktoriseringen $n = s_1 s_2 \ldots s_t$ (hvis et slikt primtall ikke finnes så må n være et kvadrattall). Vi ser nå at p forekommer et odde antall ganger på venstre side (i $n q_1 q_1 q_2 q_2 \ldots q_m q_m$), og et like antall ganger på høyre side $p_1 p_1 p_2 p_2 \ldots p_r p_r$). Dette er en motsigelse ifølge aritmetikkens fundamentalteorem (en primtallsfaktorisering er unik). Vi konkluderer med at $\sqrt{n}$ er irrasjonal.