Fasit til oppgaver dere har spurt om, som ikke ble tatt på plenumsregning 26/9

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

September 26, 2011

Oppgave 4.1.5

b)

Differenslikningen $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2 - r + 1 = 0$, som har løsning $r = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Velger vi $r = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ så ser vi at r har modulus 1, og argument gitt ved $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$, som gir $\theta = \frac{\pi}{3}$. Den generelle løsningen på reell form blir dermed

$$x_n = E1^n \cos(n\pi/3) + F1^n \sin(n\pi/3) = E\cos(n\pi/3) + F\sin(n\pi/3).$$

$x_0 = 2$ og $x_1 = 1$ gir likningene

$$\begin{aligned} E &= 2 \\ E\frac{1}{2} + F\frac{\sqrt{3}}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Setter vi inn i den andre likningen får vi at $F = 0$, slik at løsningen blir $2\cos(n\pi/3)$.

d)

Differenslikningen $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2 + 2r + 2 = 0$, som har løsning $r = -1 \pm i$. Velger vi $r = -1 + i$ så ser vi at r har modulus $\sqrt{2}$, og argument gitt ved $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Den generelle løsningen på reell form blir dermed

$$x_n = E\sqrt{2}^n \cos(n3\pi/4) + F\sqrt{2}^n \sin(n3\pi/4).$$

$x_0 = 1$ og $x_1 = -2$ gir likningene

$$\begin{aligned} E &= 1 \\ -E\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + F\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} &= -2. \end{aligned}$$

Setter vi inn i den andre likningen får vi at $F = E - 2 = -1$, slik at løsningen blir

$$x_n = \sqrt{2}^n \cos(n3\pi/4) - \sqrt{2}^n \sin(n3\pi/4).$$

Oppgave 4.1.15

Siden en hunn har både en mor og en far så er det klart at $x_1 = 2$. Siden moren har både mor og far, og faren bare har en mor, så er det klart at $x_2 = 3$, og at vi har to hunnbier og en hannbie to generasjoner tilbake. Siden hver hunnbie har to foreldre, og hannbien bare har en mor, så er det klart at $x_3 = 2 \times 2 + 1 = 5$. Mer generelt, legg merke til at siden enhver bie i generasjon $n-1$ har nøykatig en bie som mor fra generasjon n, så er antall hunnbier i generasjon n lik x_{n-1}. Videre er antall hannbier etter n generasjoner lik antall hunnbier i generasjon $n-1$ (siden det bare er hunnbiene som har en far fra forrige generasjon), og antall hunnbier i generasjon $n-1$ svarer igjen til x_{n-2}. Legger vi sammen antall hunnbier og hannbier får vi at $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Vi ser her at vi har samme differenslikning som i Oppgave 4.1.9, slik at vi har den generell løsningen $x_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Setter vi inn $x_1 = 2$ og $x_2 = 3$ får vi likningene

$$
\begin{aligned}
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 2\\
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 3,
\end{aligned}
$$

som kan skrives

$$
\begin{aligned}
C(1+\sqrt{5}) + D(1-\sqrt{5}) &= 4\\
C(3+\sqrt{5}) + D(3-\sqrt{5}) &= 6.
\end{aligned}
$$

Hvis vi trekker disse fra hverandre får vi at $2C + 2D = 2$, slik at $D = 1 - C$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $C+1-C+\sqrt{5}(C-1+C) = 4$, som gir at $\sqrt{5}(2C-1) = 3$, og dermed

$$
C = \frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10}(3+\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
$$

hvor vi gjenkjente $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ fra utregninger ovenfor. Til slutt får vi

$$
D = 1 - C = 1 - (\frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.
$$

Dermed får vi at

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).
\end{aligned}
$$

som er uttrykket for hvor mange forfedre en hunn har n generasjoner tilbake. La til slutt y_n være antall forfedre en hann har n generasjoner tilbake. Siden en hann bare har en mor så er det klart at generasjonstreet til en hann ser likt ut som for en hunn, med unntak av et ekstra generasjonsledd helt i begynnelsen. Derfor er

$$y_n = x_{n-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Vi legger merke til at løsningen vi fikk både for x_n og y_n er det samme som den vi fant i Oppgave 4.1.9, med den ene forskjellen at sekvsensen er forsinket med en eller to elementer. Og hvis du ser nærmere på løsningen fra 4.3.9 så er $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, som jo er initialbetingelsene i denne oppgaven. Derfor kunne vi spart oss utregningene i denne oppgaven hvis vi allerede hadde sett at vi må få samme følge som i Oppgave 4.1.9.

Oppgave 5.3.1

a)

Absolutt feil er $|a - \tilde{a}| = |1 - 0.9994| = 0.0006$. Relativ feil er $\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = \frac{0.0006}{1} = 0.0006$. Den relative feilen kan også skrives $0.6 \times 10^{-3} \approx 10^{-3}$, og observasjon 5.20 sier da at omtrent de 3 mest signikante sifrene i a og $\tilde{a}$ skal stemme overens. Dette er ikke så langt fra sannheten i dette tilfellet, siden 0.999 (der vi har tatt med de tre mest signifante siffer) vil rundes av til 1.000.

b)

Absolutt feil er $|a - \tilde{a}| = |24 - 23.56| = 0.44$. Relativ feil er $\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = \frac{0.44}{24} = 0.01833$. Den relative feilen kan også skrives $1.8 \times 10^{-2} \approx 10^{-2}$, og observasjon 5.20 sier da at omtrent de 2 mest signikante sifrene i a og $\tilde{a}$ skal stemme overens. Dette er faktisk riktig, siden 23.56 med de to mest signifikante sifrene gir 24.

c)

Absolutt feil er $|a - \tilde{a}| = |-1267 + 1267.345| = 0.345$. Relativ feil er $\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = \frac{0.345}{1267} = 0.000272$. Den relative feilen kan også skrives $2.7 \times 10^{-4} \approx 10^{-4}$, og observasjon 5.20 sier da at omtrent de 4 mest signikante sifrene i a og $\tilde{a}$ skal stemme overens. Dette er faktisk riktig, siden -1267.345 med de to mest signifikante sifrene gir -1267.

d)

Absolutt feil er $|a - \tilde{a}| = |124 - 7| = 117$. Relativ feil er $\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = \frac{117}{124} = 0.9435$. Den relative feilen kan også skrives $0.94 \times 10^{0} \approx 10^{0}$, og observasjon 5.20 sier da at ingen signikante sifre i a og $\tilde{a}$ skal stemme overens. Dette er riktig i dette tilfellet.

Oppgave 5.3.2

a)

Absolutt feil den motsatte veien er $\frac{|\tilde{a}-a|}{|\tilde{a}|} = \frac{0.0006}{0.9994} = 0.0006$, slik at vi har tilnærmet samme relative feil. Dette stemmer overens med setningen i Seksjon 5.3.3, som sier at de to relative feilene skal være ganske like, i tilfeller som her der de relative feilene er små.

b)

Absolutt feil den motsatte veien er $\frac{|\tilde{a}-a|}{|\tilde{a}|} = \frac{0.44}{23.56} = 0.0187$, slik at vi har tilnærmet samme relative feil. Dette stemmer også overens med setningen i Seksjon 5.3.3, på samme måte som for a).

c)

Absolutt feil den motsatte veien er $\frac{|\tilde{a}-a|}{|\tilde{a}|} = \frac{0.345}{1267.345} = 0.000272$, slik at vi har tilnærmet samme relative feil. Dette stemmer også overens med setningen i Seksjon 5.3.3.

d)

Absolutt feil den motsatte veien er $\frac{|\tilde{a}-a|}{|\tilde{a}|} = \frac{117}{7} \approx 16.7$, slik at vi her har relatove fil som skilte seg mye fra hverandre. Dette henger sammen med at de relative feilene er ganske store, slik at observasjonen ikke har gyldighet.

Oppgave 5.3.3

I eksempel 5.9 fant vi tilnærmingen $\tilde{a} = 0.1247 \times 10^2 = 13.47$ til den faktiske summen $5.645 + 7.821 = 13.466$. Relativ feil blir

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = \frac{0.004}{13.466} \approx 0.000297 = 2.97 \times 10^{-4} \approx 10^{-4}.$$

Ut fra observasjonen skal altså tallene stemme overens i de fire mest signifikante sifrene. Dette stemmer overens siden de første fire signifikante sifrene i 13.466 er 13.47.

I eksempel 5.10 fant vi tilnærmingen $0.4234 \times 10^2 = 42.34$ til summen $42.34 + 0.0033 = 42.3433$. Relativ feil blir

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = \frac{0.0033}{42.3433} \approx 0.000078 = 0.78 \times 10^{-4} \approx 10^{-4}.$$

Ut fra observasjonen skal altså tallene stemme overens i de fire mest signifikante sifrene. Dette stemmer overens siden de første fire signifikante sifrene i 42.3433 er 42.34.

I eksempel 5.11 fant vi tilnærmingen $0.7 \times 10^{-1} = 0.07$ til differansen $10.34 - 10.27 = 0.07$. Relativ feil blir her 0, og alle signifikante sifrene skal derfor stemme overens, noe de også gjør siden tallene er like.

I eksempel 5.12 fant vi tilnærmingen $0.9000 \times 10^{-3} = 0.0009$ til differansen $10/7 - 1.42 \approx 0.8571 \times 10^{-3} = 0.0008571$. Relativ feil blir

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|} = \frac{0.0000429}{0.0008571} \approx 0.05 = 0.5 \times 10^{-1} \approx 10^{-1}.$$

Ut fra observasjonen skal altså tallene stemme overens i kun det fire mest signifikante sifret. Dette stemmer overens siden 0.0008571 med kun det mest signifikante sifret blir 0.0009.