4.2.18

a) Ut fra teksten: Tar ut $(1,02)^n$ kroner det n'te året (tar ut litt mer for hvert år (inflasjon))

med Renter på pengene fra året før blir pengene til $1.06\,X_n$

Derfor: $X_{n+1} = 1{,}06\,X_n - (1{,}02)^n a$

Initialbetingelse: $X_0 = 10$

b) generell løsning av homogen likning: ($x_{n+1} = 1.06 x_n$)

$$x_n^h = A(1.06)^n$$

partikulær løsning: Vi ~~prøver~~ prøver $x_n^p = c(1{,}02)^n$;

$$x_{n+1} = 1{,}06 x_n - (1{,}02)^n a :$$

$$c(1{,}02)^{n+1} = 1.06(c1.02^n) - (1{,}02)^n a$$

$$1{,}02c = 1.06c - a$$

$$a = 0.04c$$

$$c = 25a$$

$$\Rightarrow x_n = x_n^p + x_n^h = 25a(1.02)^n + A(1{,}06)^n$$

$$x_0 = 10 \Rightarrow 10 = 25a + A \Rightarrow A = (10 - 25a)$$

$$\Rightarrow x_n = \underline{\underline{25a(1{,}02)^n + (10-25a)(1.06)^n}}$$

$x_n > 0$ alle n: Må ha $10 - 25a > 0 \Leftrightarrow 10 > 25a$

Kan ta ut maks. <u>400 000</u> kr første år. $\Leftrightarrow a < \frac{10}{25} = 0.4$

11.1.10 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ i punktet 1, grad 3

$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2 \quad f''(x) = 12x^2 - 6 \quad f'''(x) = 24x$

$f(1) = 1 - 3 + 2 - 7 = -7$

$f'(1) = 0 \qquad f''(1) = 6 \qquad f'''(1) = 24$

$$T_3(x) = f(1) + \underbrace{f'(1)(x-1)}_{0} + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= \underline{\underline{-7 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3}}$$

Kompendiet

6.5.2 $\quad x_{n+1} - 3x_n = 5^{-n} \qquad x_0 = -\frac{5}{14}$

$x_n^h = C3^n$

x_n^p: vi prøver $x_n^p = A5^{-n}$: $\qquad A5^{-(n+1)} - 3A5^{-n} = 5^{-n}$

$\frac{A}{5} - 3A = 1$

$A - 15A = 5$

$14A = -5$

$A = -\frac{5}{14}$

$\Rightarrow x_n^p = -\frac{5}{14}5^{-n}$

$\Rightarrow \underline{x_n = C3^n - \frac{5}{14}5^{-n}}$

$x_0 = -\frac{5}{14} \Rightarrow -\frac{5}{14} = C - \frac{5}{14} \Leftrightarrow C = 0$

$\Rightarrow \underline{x_n = -\frac{5}{14}5^{-n}}$

b) $-\frac{5}{14}$ kan ikke representeres eksakt på datamaskinen, derfor vil maskinen regne ut $\hat{x}_n = \hat{\varepsilon}3^n - \frac{5}{14}(1-\hat{\varepsilon})5^{-n}$

Derfor vil $\hat{x}_n$ gå mot ∞ når n blir stor.

6.5.5

$$x_{n+2} - \frac{5}{2} x_{n+1} + x_n = 0 \qquad x_0 = 1 \qquad x_1 = \frac{1}{2}$$

$$r^2 - \frac{5}{2} r + 1 = 0 \quad \text{(kar likning)}$$

$$r = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow r = 2 \text{ eller } r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_n = A 2^n + B \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{er generell løsning}$$

$$x_0 = 1 : \quad A + B = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2} : \quad 2A + \frac{1}{2} B = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = 1, \quad 4A + B = 1 \quad \Rightarrow A = 0, \quad \Rightarrow B = 1$$

$$\Rightarrow x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}$$

b) Simulerer numerisk: Ingen avrundingsfeil i initialverdiene, derfor vil maskinen finne tilnærmet de samme verdiene for alle n.