Fasit til oppgaver dere har spurt om, som ikke ble tatt på plenumsregning 3/10

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

October 3, 2011

Oppgave 11.1.7

De deriverte til $f(x) = \arctan x$ er

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2)}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Dermed får vi at

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -2.$$

Dermed blir Taylorpolynomet av tredje grad om 0 lik

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Oppgave 6.2.1

a)

Vi har at $x_{n+2} = f(n, x_n, x_{n+1}) = 3x_{n+1} - x_n$. Vi regner ut

$$\begin{aligned}
x_2 &= 3x_1 - x_0 = 3 - 2 = 1 \\
x_3 &= 3x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2 \\
x_4 &= 3x_3 - x_2 = 3 \times 2 - 1 = 5 \\
x_5 &= 3x_4 - x_3 = 3 \times 5 - 2 = 13.
\end{aligned}$$

d)

Vi har at $x_{n+1} = f(n, x_n) = -\sqrt{4 - x_n}$. Vi regner ut

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\sqrt{4 - x_0} = -\sqrt{4 - 0} = -2 \\
x_2 &= -\sqrt{4 - x_1} = -\sqrt{4 + 2} = -\sqrt{6} \approx -2.4495 \\
x_3 &= -\sqrt{4 - x_2} = -\sqrt{4 + 2.4495} \approx -2.5396 \\
x_4 &= -\sqrt{4 - x_3} = -\sqrt{4 + 2.5396} \approx -2.5573 \\
x_5 &= -\sqrt{4 - x_4} = -\sqrt{4 + 2.5573} \approx -2.5607.
\end{aligned}$$

e)

Vi har at $x_{n+2} = f(n, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{5}(3x_{n+1} - x_n + n)$. Vi regner ut

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{5}(3 - 0 + 0) = \frac{3}{5} \\
x_3 &= \frac{1}{5}(\frac{9}{5} - 1 + 1) = \frac{9}{25} \\
x_4 &= \frac{1}{5}(\frac{27}{25} - \frac{3}{5} + 2) = \frac{62}{125} \\
x_5 &= \frac{1}{5}(\frac{186}{125} - \frac{9}{25} + 3) = \frac{816}{625}.
\end{aligned}$$

f)

Setter vi inn $x_0 = 3$ får vi at $x_1^2 = -15 + 1 = -14$, som opplagt ikke har noen løsning. Videre er ikke x_{n+1} unikt bestemt for andre intialibetingelser, siden $x_{n+1} = \pm\sqrt{1 - 5x_n}$.

Oppgave 6.5.4

a)

Den karakteristiske likningen er $r^2 - \frac{2}{5}r + \frac{1}{45} = 0$, som har røtter

$$r = \frac{\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{4}{45}}}{2} = \frac{\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{36-20}{225}}}{2} = \frac{\frac{2}{5} \pm \frac{4}{15}}{2} = \frac{1}{5} \pm \frac{2}{15},$$

slik at $r = \frac{1}{3}$ eller $r = \frac{1}{15}$. Dermed blir den generelle løsningen på differenslikningen $x_n = A\left(\frac{1}{15}\right)^n + B\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Initialverdiene $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{15}$ gir

$$\begin{aligned}
A + B &= 1 \\
\frac{1}{15}A + \frac{1}{3}B &= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

Disse kan også skrives

$$A + B = 1$$
$$A + 5B = 1.$$

Vi ser nå raskt at løsningen av dette blir $A = 1$, $B = 0$, slik at løsningen av differenslikningen blir $x_n = \left(\frac{1}{15}\right)^n$.

b)

Den andre initialbetingelsen kan ikke representeres eksakt på datamaskinen, slik at maskinen vil i stedet finne en løsning på formen

$$\hat{x_n} = (1 - \hat{\epsilon}) \left(\frac{1}{15}\right)^n + \hat{\epsilon} \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

der $\hat{\epsilon}$ er et lite tall som representerer avrundingsfeil som skjer i maskinen. Når n blir stor vil "feilen" $\hat{\epsilon}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ dominere i dette uttrykket, som forklarer hvorfor vi må forvente numeriske unøyaktigheter for store n. Legg merke til at den absolutte feilen ikke er stor siden $\hat{\epsilon}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ er et lite tall, men den relative feilen er veldig stor, siden $\hat{\epsilon}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ er relativt mye større enn $\left(\frac{1}{15}\right)^n$ for store n.

c)

$\hat{\epsilon}$ representerer omtrent det minste tallet maskinen kan representere. Bruker vi 64 bits svarer dette til $\approx 2^{-63} \approx 10^{-17}$. Vi har mistet alle signifikante siffer når "feilen" $\hat{\epsilon}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ blir større enn den faktiske løsningen $\left(\frac{1}{15}\right)^n$, det vil si at $10^{-17}\left(\frac{1}{3}\right)^n > \left(\frac{1}{15}\right)^n$. Dette svarer til at $5^n > 10^{17}$, som gir $n > \frac{17 \ln 10}{\ln 5} \approx 24$. Argumentene som gis her er ganske omtrentlige. For eksempel kan det tenkes at estimatet for $\hat{\epsilon}$ er ganske grovt.