Løsningsforslag til utvalgte oppgaver fra midtveiseksamen

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

October 18, 2011

Oppgave 14

Vi setter $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. For å regne ut Newton-formen til det interpolerende polynomet må vi fylle inn verdiene i tabellen

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2,x_3] & f[x_1,x_2,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

Vi får først at

$$\begin{aligned}
f[x_0,x_1] &= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{2-0}{1-0} = 2 \\
f[x_1,x_2] &= \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{1-2}{2-1} = -1 \\
f[x_2,x_3] &= \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} = \frac{2-1}{3-2} = 1.
\end{aligned}$$

Deretter får vi

$$\begin{aligned}
f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{-1-2}{2-0} = -\frac{3}{2} \\
f[x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = \frac{1-(-1)}{3-1} = 1.
\end{aligned}$$

Tils slutt får vi

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{1-(-3/2)}{3-0} = \frac{5}{6}.$$

Newton-formen til det interpolerende polynomet blir dermed

$$\begin{aligned}
&f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{5}{6}x(x-1)(x-2),
\end{aligned}$$

som er svaralternativ D.

Oppgave 16

Hvis den generelle løsningen er $x_n = C3^n + D2^{-n}$ så må 3 of $\frac{1}{2}$ være røttene i den karakteristiske likningen. Siden det er et totall foran x_{n+2} i alle alternativene så må den karakteristiske likningen være

$$2(r-3)(r-1/2) = 2(r^2 - \frac{7}{2}r + \frac{3}{2}) = 2r^2 - 7r + 3 = 0,$$

som gir at differenslikningen må være $2x_{n+2} - 7x_{n+1} + 3x_n = 0$, som er svaralternativ A.

Oppgave 17

Siden høyresiden er 3^n prøver vi oss frem med $x_n^p = a3^n$ for å finne en partikulær løsning. Vi får da likningen

$$a3^{n+2} - 4a3^{n+1} + 4a3^n = 3^n,$$

som gir at $9a - 12a + 4a = 1$, som gir $a = 1$. En partikulær løsning er altså $x_n^p = 3^n$. Den karakteristiske likningen er $r^2 - 4r + 4 = 0$, som har kun $r = 2$ som rot. Den generelle løsningen av den homogene likningen er derfor $x_n^h = A2^n + Bn2^n$, slik at den generelle løsningen blir

$$x_n = x_n^h + x_n^p = A2^n + Bn2^n + 3^n.$$

Setter vi inn for initialbetingelsene $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ får vi likningene

$$\begin{aligned} A + 1 &= 1 \\ 2A + 2B + 3 &= 0 \end{aligned}$$

som gir at $A = 0$, $B = -\frac{3}{2}$. Løsningen blir dermed

$$x_n = -\frac{3}{2}2^n + 3^n = 3^n - 3n2^{n-1},$$

som er alternativ A.

Oppgave 18

For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = a$, og får $a - 3a = 1$, slik at $a = -\frac{1}{2}$. Den generelle løsningen av den homogene likningen er $x_n^h = A3^n$, slik at den generelle løsningen er

$$x_n = x_n^h + x_n^p = A3^n - \frac{1}{2}.$$

Initialbetingelsen gir likningen $3A - \frac{1}{2} = 1$, som gir $A = \frac{1}{2}$. Dermed blir løsningen $x_n = \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}$. Fra dette er det klart at vi får overflow for tilstrekkelig store n, slik at D er riktig svaralternativ.

Oppgave 19

Differenslikningen har karakteristisk likning $9r^2 - 3r - 2 = 0$, som har røtter $r = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{18} = \frac{3 \pm 9}{18}$. Røttene blir derfor $r_1 = \frac{2}{3}$ og $r_2 = -\frac{1}{3}$. Den generelle løsningen blir derfor $x_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Setter vi inn initialbetingelsene $x_0 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$ får vi

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A\left(\frac{2}{3}\right) + B\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Disse kan forenkles til

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - B &= -1 \end{aligned}$$

som gir at $A = 0$, $B = 1$. Løsningen blir derfor $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, men på grunn av avrundingsfeil i den ene initialbetingelsen så vil den beregnede løsningen i stedet være på formen $\overline{x_n} = \epsilon_1 \left(\frac{2}{3}\right)^n + (1 - \epsilon_2)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Denne er dominert av $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, men IKKE av $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ eller $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Derfor er D riktig svaralternativ, siden selv om A og B også dominerer den beregnede løsningen for store n så gir disse større verdier.