11.2.9 (kalkulus)

Vi skal se på $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ (c er et tall mellom 0 og x)

Vi husker $e^x = T_n(x) + R_n(x) = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}_{T_n} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n}$

$$\frac{1-e^{-t}}{t} = \frac{1 - \left(1 + (-t) + \frac{(-t)^2}{2!} + \dots + \frac{(-t)^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}(-t)^{n+1}\right)}{t}$$

$$= \frac{t - \frac{t^2}{2!} + \dots}{t} = 1 - \frac{t}{2!} \quad (-1)^{n+1}\frac{t^{n-1}}{n!} + (-1)^{n+2}\frac{e^c}{(n+1)!}t^n$$

Vi vil velge n slik at |restledd| $< 10^{-3}$:

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!}\right) + \int_0^1 (-1)^{n+2}\frac{e^c}{(n+1)!}t^n\,dt$$

Vi må velge n slik at $\frac{1}{(n+1)!(n+1)} \leq 10^{-3}$

$\Leftrightarrow (n+1)(n+1)! \geq 1000 \Leftrightarrow n \geq 5$

absoluttverdi $\leq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^c}{(n+1)!}t^n\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(n+1)!}t^n\,dt$

$= \left[\frac{1}{(n+1)!(n+1)}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!(n+1)}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3!} - \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!}\right)dt$$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2!\cdot 2} + \frac{t^3}{3!\cdot 3} - \frac{t^4}{4!\cdot 4} + \frac{t^5}{5!\cdot 5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{5\cdot 5!}$$

$$= \dots = \frac{5737}{7200} \approx 0{,}7968$$

9.2.2

a) p_1, p_2 interpolerer f i x_0, x_1, x_2:

$$p_1(x_0) = p_2(x_0) = f(x_0) \Rightarrow p_1(x_0) - p_2(x_0) = (p_1 - p_2)(x_0) = 0$$

$$p_1(x_1) = p_2(x_1) = f(x_1) \Rightarrow p_1(x_1) - p_2(x_1) = (p_1 - p_2)(x_1) = 0$$

$$p_1(x_2) = p_2(x_2) = f(x_2) \Rightarrow p_1(x_2) - p_2(x_2) = (p_1 - p_2)(x_2) = 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{p_2 - p_1 = 0}$ i punktene x_0, x_1, x_2

b) Algebraens fundamentalteorem: et polynom av grad n som $\neq 0$ har maks n forskjellige røtter

siden $p_2 - p_1$ har grad 2, og har 3 røtter, så må $p_2 - p_1 = 0$ overalt, slik at $p_1 = p_2$

c) på samme måte: $p_2 - p_1 = 0$ i $x_0, x_1, \dots, x_n$, slik at $p_2 - p_1$ har grad n, med $n+1$ forskjellige røtter.

Algebraens fund. teo.: $\underline{p_2 = p_1}$

9.3.2

a)

x_0	$f[x_0]$				0	2		
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$			1	1	-1	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		2	0	-1	0

Newtonform: $f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$= 2 + (-1)(x-0) + 0 = 2 - x$

funksjonsverdiene var tatt som verdiene til $y = 2-x$, slik at funksjonen er lik interpolanten i dette tilfellet.

b) interpolerer f i $x_0, x_1, \dots, x_n$ der f er pol grad n

da er både f og $\underbrace{\text{interpolanten}}_{p_n}$ n'te gradspol., $f - p_n = 0$ i $n+1$ pkt.

$\Rightarrow f = p_n$ (se i 9.2.2)

spesielt i a): $2-x$ er spesielt et andregradspolynom.

10.4.5

a) $f(x) = \frac{1}{x} - R$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\frac{1}{R}} - R = R - R = 0$

(newtons metode vil kunne gi tilnærming til nullpkt. $\frac{1}{R}$)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - R}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n + x_n^2\left(\frac{1}{x_n} - R\right)$$

$$= x_n + x_n - Rx_n^2 = \underline{x_n(2 - Rx_n)}$$

(dette uttrykket bruker ikke divisjon)

b) $\frac{1}{7}$: Vi setter $R = 7$:

$x_0 = 0.1$

$x_1 = 0.1300$

$x_2 = 0.1417$

$x_3 = 0.14284777000$

$x_4 = 0.14285714224219 0$

$x_5 = 0.142857142857143$ $\Rightarrow \geq 10$ riktige siffer