Fasit til oppgaver dere har spurt om, som ikke ble tatt på plenumsregning 31/10

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

November 1, 2011

Oppgave 11.1.1

a)

På min maskin er det 10^{-8} som er den potensen av 10 som gir minst feil i tilnærmingen Tester dette ved å kjøre følgende program

```
from math import *

for p in range(15):
  h=10.0**(-p)
  print p, abs((exp(1+h)-exp(1))/h-exp(1))
```

b)

Hvis vi bruker verdien $\epsilon^* = 7 \times 10^{-17}$ fra Eksempel 11.14 så gir Lemma 11.13 den optimale steglengden $h^* = 2\sqrt{\epsilon^*} \approx 1.6733 \times 10^{-8}$ (vi forkorter siden $f(a) = f''(a)$), som ikke er så langt fra den verdien vi fant fra det lille programmet vårt.

Oppgave 11.3.4

b)

Slik kan vi plotte kurven sammen med sekantene i Python:

```
from numpy import *

from scitools.easyviz import *

x=arange(0,6,0.05,float)
plot(x,(-x**2+10*x-5)/4)
hold('on')
plot([1,3],[(-1**2+10*1-5)/4,(-3**2+10*3-5)/4])
```

```
plot([1,5],[(-1**2+10*1-5)/4,(-5**2+10*5-5)/4])
plot([3,5],[(-3**2+10*3-5)/4,(-5**2+10*5-5)/4])
```

Oppgave 11.4.1

a)

På min maskin er det 10^{-3} som er den potensen av 10 som gir minst feil i tilnærmingen Tester dette ved å kjøre følgende program

```
from math import *

for p in range(15):
  h=10.0**(-p)
  print p, abs((exp(1-2*h)-8*exp(1-h)+8*exp(1+h)-exp(1+2*h))/(12*h)-exp(1))
```

b)

Hvis vi bruker verdien $\epsilon^* = 7 \times 10^{-17}$ fra Eksempel 11.14 så gir (11.31) den optimale steglengden $h^* = \sqrt[5]{\frac{27\epsilon^*}{2}} \approx 9.8875 \times 10^{-4}$ (vi forkorter siden $f(a) = f^{(5)}(a)$), som ikke er så langt fra den verdien vi fant fra det lille programmet vårt.

Oppgave 11.5.1

a)

På min maskin er det 10^{-4} som er den potensen av 10 som gir minst feil i tilnærmingen Tester dette ved å kjøre følgende program

```
from math import *

for p in range(15):
  h=10.0**(-p)
  print p, abs((exp(1-h)-2*exp(1)+exp(1+h))/h**2-exp(1))
```

b)

Hvis vi bruker verdien $\epsilon^* = 7 \times 10^{-17}$ fra Eksempel 11.14 så gir Observasjon 11.23 den optimale steglengden $h^* = \sqrt[4]{36\epsilon^*} \approx 2.2405 \times 10^{-4}$ (vi forkorter siden $f(a) = f^{(4)}(a)$), som ikke er så langt fra den verdien vi fant fra det lille programmet vårt.

Oppgave 11.5.2

a)

Vi Taylorutvikler f om a (grad 3), og regner ut i $a+h$ og $a-h$:

$$
\begin{aligned}
f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(a)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(\xi_1)\frac{h^4}{24} \\
f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(\xi_2)\frac{h^4}{24},
\end{aligned}
$$

der $\xi_1 \in [a-h, a]$, $\xi_2 \in [a, a+h]$. Legger vi sammen disse likningene får vi at

$$
f(a-h) + f(a+h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + f^{(4)}(\xi_1)\frac{h^4}{24} + f^{(4)}(\xi_2)\frac{h^4}{24},
$$

som også kan skrives

$$
f''(a) - \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = -\frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)),
$$

som er (11.33).

b)

Vi setter $\overline{f(a-h)} = f(a-h)(1+\epsilon_1)$, $\overline{f(a)} = f(a)(1+\epsilon_2)$, $\overline{f(a+h)} = f(a+h)(1+\epsilon_3)$, og får

$$
\begin{aligned}
& f''(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - 2\overline{f(a)} + \overline{f(a-h)}}{h^2} \\
&= f''(a) - \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{\epsilon_1 f(a-h) - 2\epsilon_2 f(a) + \epsilon_3 f(a+h)}{h^2} \\
&= -\frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) - \frac{\epsilon_1 f(a-h) - 2\epsilon_2 f(a) + \epsilon_3 f(a+h)}{h^2}.
\end{aligned}
$$

c)

Vi setter $M_1 = \max_{x\in[a-h,a+h]} |f^{(4)}(x)|$ og $M_2 = \max_{x\in[a-h,a+h]} |f(x)|$, setter inn $|\epsilon_i| \le \epsilon^*$, tar absoluttverdier i likningen over og får :

$$
\begin{aligned}
& f''(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - 2\overline{f(a)} + \overline{f(a-h)}}{h^2} \\
&= \left| -\frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) - \frac{\epsilon_1 f(a-h) - 2\epsilon_2 f(a) + \epsilon_3 f(a+h)}{h^2} \right| \\
&\le \frac{h^4}{24}M_1 + \frac{h^4}{24}M_1 + \frac{M_2\epsilon^*}{h^2} + \frac{2M_2\epsilon^*}{h^2} + \frac{M_2\epsilon^*}{h^2} \\
&= \frac{h^4}{12}M_1 + \frac{4\epsilon^*}{h^2}M_2.
\end{aligned}
$$

Oppgave 11.5.3

a)

Hvis tilnærmingsmetoden $f'(a) \approx c_1 f(a-h) + c_2 f(a+h)$ skal være eksakt for $f(x) = 1$ må vi ha at $0 = c_1 + c_2$, siden $f(a-h) = f(a+h) = 1$, og siden $f'(x) = 0$. Derfor må vi ha at $c_2 = -c_1$.

Hvis metoden skal være eksakt for $f(x) = x$ må vi på samme måte ha at

$$1 = c_1(a-h) + c_2(a+h) = c_1(a-h) - c_1(a+h) = -2c_1 h,$$

slik at $c_1 = -\frac{1}{2h}$, og dermed også $c_2 = \frac{1}{2h}$. Dermed blir metiden $-\frac{1}{2h} f(a-h) + \frac{1}{2h} f(a+h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

b)

Hvis $f(x) = cx + d$ har vi at $f'(x) = c$, og metoden tar formen

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{c(a+h) + d - (c(a-h) + d)}{2h} = \frac{2ch}{2h} = c,$$

slik at metoden er eksakt for alle polynomer av grad ≤ 1. Vi ser at metoden faller sammen med den symmetriske Newton-metoden for derivasjon, og den har derfor en feil av orden $\frac{1}{h^2}$, som er bedre enn den andre Newton-metoden for derivasjon (som har en feil av orden $\frac{1}{h}$). Den er dårligere enn firepunktsmetoden for numerisk derivasjon, som har orden $\frac{1}{h^4}$.

Denne oppgaven kunne også ha nevnt at metoden også er eksakt for alle poynomer av grad ≤ 2 (se også Oppgave 11.3.4). Dette kan man avlede fra feilestimatet fra Seksjon 11.3 (som bruker $f^{(3)}(x)$, og siden alle andregradspolynomer har tredjederivert lik 0), eller man kunne som over satt inn $f(x) = x^2$ i formelen:

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{(a+h)^2 - (a-h)^2}{2h} = \frac{4ah}{2h} = 2a,$$

som jo også er $f'(a)$.

c)

Hvis tilnærmingsmetoden $f''(a) \approx c_1 f(a-h) + c_2 f(a) + c_3 f(a+h)$ skal være eksakt for $f(x) = 1$ må vi ha at $0 = c_1 + c_2 + c_3$. Skal den være eksakt for $f(x) = x$ må vi ha at

$$0 = c_1(a-h) + c_2 a + c_3(a+h) = a(c_1 + c_2 + c_3) + h(-c_1 + c_3) = h(-c_1 + c_3),$$

som gir at $c_1 = c_3$. Skal den også være eksakt for $f(x) = x^2$ må vi ha at

$$\begin{aligned} 2 &= c_1(a-h)^2 + c_2 a^2 + c_3(a+h)^2 \\ &= a^2(c_1 + c_2 + c_3) - 2ahc_1 + 2ahc_3 + h^2(c_1 + c_3) = 2c_1 h^2, \end{aligned}$$

som gir at $c_1 = \frac{1}{h^2}$. Vi får dermed også at $c_3 = \frac{1}{h^2}$, og at $c_2 = -c_1 - c_2 = -\frac{2}{h^2}$, slik at metoden blir

$$\frac{1}{2h}f(a-h) - \frac{1}{h}f(a) + \frac{1}{2h}f(a+h) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

Vi ser at dette faller sammen med trepunktsmetoden vi allerede har sett på for å regne ut den andrederiverte i Seksjon 11.5.

d)

Alle tredjegradspolynomer har fjerdederivert lik 0, og derfor blir trunkeringsfeilen lik 0 ($M_1 = 0$ i Teorem 11.22). Alternativt kunne vi satt inn $f(x) = x^3$ i formelen:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{2h} \\
&= \frac{(a-h)^3 - 2a^3 + (a+h)^3}{h^2} \\
&= \frac{a^3 - 3a^2h + 3ah^2 - h^3 - 2a^3 + a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h^2} \\
&= \frac{6ah^2}{h^2} = 6a,
\end{aligned}$$

som faller sammen med den andrederiverte til f i a.

Oppgave 12.3.3

Vi setter inn fra (12.16) og (12.17) og får

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \\
&= \left|f(a_{1/2})(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a_{1/2})^2 f''(\xi_1)dx - (f(a_{1/2}) + \frac{(b-a)^2}{16}f''(\xi_2) + \frac{(b-a)^2}{16}f''(\xi_3))(b-a)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_a^b (x-a_{1/2})^2 f''(\xi_1)dx - (\frac{(b-a)^2}{16}f''(\xi_2) + \frac{(b-a)^2}{16}f''(\xi_3))(b-a)\right| \\
&\le \left|\frac{1}{2}\int_a^b (x-a_{1/2})^2 f''(\xi_1)dx\right| + \left|\frac{(b-a)^2}{16}f''(\xi_2)\right|(b-a) + \left|\frac{(b-a)^2}{16}f''(\xi_3)\right|(b-a) \\
&\le \frac{1}{2}\int_a^b (x-a_{1/2})^2 |f''(\xi_1)|dx + \frac{(b-a)^3}{16}M + \frac{(b-a)^3}{16}M \\
&\le \frac{M}{2}\int_a^b (x-a_{1/2})^2 dx + \frac{(b-a)^3}{8}M \\
&= \frac{M}{2}[\frac{1}{3}(x-a_{1/2})^3]_a^b + \frac{(b-a)^3}{8}M = \frac{M}{6}\left(\frac{1}{8}(b-a)^3 + \frac{1}{8}(b-a)^3\right) + \frac{(b-a)^3}{8}M \\
&= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right)M(b-a)^3 = \frac{1}{6}M(b-a)^3.
\end{aligned}
$$

Oppgave 12.4.4

a)

Det er nok å verifisere Simpsons metode på hvert enkelt intervall. Integralene blir

$$
\begin{aligned}
\int_{a-h}^{a+h} x^3 dx &= \frac{1}{4}((a+h)^4 - (a-h)^4) = \frac{1}{4}(8a^3h + 8ah^3) = 2a^3h + 2ah^3 \\
\int_{a-h}^{a+h} x^2 dx &= \frac{1}{3}((a+h)^3 - (a-h)^3) = \frac{1}{3}(6a^2h + 2h^3) = \frac{h}{3}(6a^2 + 2h^2) \\
\int_{a-h}^{a+h} x dx &= \frac{1}{2}((a+h)^2 - (a-h)^2) = \frac{1}{2}4ah = 2ah \\
\int_{a-h}^{a+h} dx &= 2h.
\end{aligned}
$$

Vi får også at selve metoden gir

$$\begin{aligned}\frac{h}{3}((a-h)^3+4a^3+(a+h)^3) &= \frac{h}{3}(6a^3+6ah^2) = 2a^3h+2ah^3\\ \frac{h}{3}((a-h)^2+4a^2+(a+h)^2) &= \frac{h}{3}(6a^2+2h^2)\\ \frac{h}{3}((a-h)+4a+(a+h)) &= 2ah\\ \frac{h}{3}(1+4+1) &= 2h.\end{aligned}$$

Dette viser at Simpsons metode er eksakt de gitte polynomene.

b)

For $f(x) = bx^3 + cx^2 + dx + e$ er integralet

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx = b\int_{a-h}^{a+h} x^3dx + c\int_{a-h}^{a+h} x^2dx + d\int_{a-h}^{a+h} xdx + e\int_{a-h}^{a+h} 1dx.$$

Videre gir selve metoden

$$\begin{aligned}&\frac{h}{3}(f(a-h)+4f(a)+f(a+h))\\ &= b\frac{h}{3}((a-h)^3+4a^3+(a+h)^3) + c\frac{h}{3}((a-h)^2+4a^2+(a+h)^2)\\ &+ d\frac{h}{3}((a-h)+4a+(a+h)) + e\frac{h}{3}(1+4+1)\end{aligned}$$

Vi ser nå at likhet følger av at vi har likher for $x^3, x^2, x, 1$.

c)

Siden $f^{(4)}(x) = 0$ for ethvert tredjegradspolynom følger det direkte fra feilestimatet at metoden er eksakt for slike funksjoner.