Fasit til oppgaver dere har spurt om, som ikke ble tatt på plenumsregning 7/11

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

November 7, 2011

Oppgave 10.4.7

a)

Løser vi $0.56p - 4.0 \cdot 10^{-8}p^2 - 16 \cdot 10^5 = 0$ finner vi at

$$\begin{aligned} p &= \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 256 \cdot 10^{-3}}}{-8.0 \cdot 10^{-8}} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.3136 - 0.256}}{-8.0 \cdot 10^{-8}} \\ &= \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.0576}}{-8.0 \cdot 10^{-8}} = \frac{-0.56 \pm 0.24}{-8.0 \cdot 10^{-8}} = (0.07 \pm 0.03)10^8, \end{aligned}$$

som gir at $p = 10^7$, eller $p = 4 \cdot 10^6$. Differensiallikningen kan dermed skrives

$$\frac{p'(t)}{(p - 10^7)(p - 4 \cdot 10^6)} = -4.0 \cdot 10^{-8}.$$

Vi må nå bruke delbrøksoppspalting, og skriver

$$\frac{1}{(p - 10^7)(p - 4 \cdot 10^6)} = \frac{A}{p - 10^7} + \frac{B}{p - 4 \cdot 10^6} = \frac{(A + B)p - 4 \cdot 10^6 A - 10^7 B}{(p - 10^7)(p - 4 \cdot 10^6)},$$

som gir likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -4 \cdot 10^6 A - 10^7 B &= 1, \end{aligned}$$

som har løsning $A = \frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$, $B = -\frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$. Integrasjon gir deretter

$$\frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \ln |p - 10^7| - \frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \ln |p - 4 \cdot 10^6| = -4.0 \cdot 10^{-8} t + C,$$

som gir at $\ln \left| \frac{p - 10^7}{p - 4 \cdot 10^6} \right| = -0.24t + C$, og deretter

$$\frac{p - 10^7}{p - 4 \cdot 10^6} = De^{-0.24t}.$$

Setter vi inn initialbetingelsen finner vi at $D = \frac{-4\cdot 10^6}{2\cdot 10^6} = -2$. Vi får nå at $p - 10^7 = -2(p - 4\cdot 10^6)e^{-0.24t}$, og til slutt at

$$p(t) = \frac{10^7 + 8\cdot 10^6 e^{-0.24t}}{1 + 2e^{-0.24t}} = 2\times 10^6 \frac{5 + 4e^{-0.24t}}{1 + 2e^{-0.24t}} = 2\cdot 10^6 \left(2 + \frac{3}{1 + 2e^{-0.24t}}\right).$$

b)

Vi ser at $\lim_{t\to\infty} p(t) = 2\cdot 10^6 \left(2 + \frac{3}{1}\right) = 10^7$.

c)

Vekstraten er størst når $(p - 10^7)(p - 4\cdot 10^6)$, som skjer når $p = 7\cdot 10^6$ (midt mellom de to nullpunktene). Setter vi inn i

$$\frac{p - 10^7}{p - 4\cdot 10^6} = -2e^{-0.24t}$$

finner vi at $\frac{-3\cdot 10^6}{3\cdot 10^6} = -1 = -2e^{-0.24t}$, som gir at

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0.24} = \frac{\ln 2}{0.24} \approx 2.881,$$

som svarer til 1963.

Oppgave 10.4.10

a)

Leddet $-ax$ kommer fra at dødsraten er proporsjonal med antall fisk $x(t)$. Leddet bx^2 kommer fra at, siden antall møter av en gitt fisk med andre fisk er proporsjonal med x, så vil det totale antall møter mellom to fisk være proporsjonal med x^2, slik at fødselsraten også er proporsjonal med x^2, det vil si at den er på formen bx^2.

b)

Differensiallikningen kan skrives $\frac{1}{x(bx-a)}\frac{dx}{dt} = 1$. Etter delbrøksoppspalting og integrasjon får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(bx-a)}\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1}{x(bx-a)}dx = \frac{1}{a}\int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x - a/b}\right)dx \\ = \frac{1}{a}\left(\ln|x - a/b| - \ln|x|\right) = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x - a/b}{x}\right| = t + C,\end{aligned}$$

slik at $\frac{x-a/b}{x} = 1 - \frac{a}{bx} = De^{at}$. Setter vi inn $x(0) = x_0$ finner vi at $D = 1 - \frac{a}{bx_0}$, Løser vi for x finner vi at

$$x(t) = \frac{a}{b(1 - De^{at})} = \frac{a}{b - (b - \frac{a}{x_0})e^{at}}.$$

c)

Hvis $b - \frac{a}{x_0} > 0$ vil vi når $b = (b - \frac{a}{x_0})e^{at}$ få 0 i nevneren, slik at $x(t) \to \infty$ når t går mot denne verdien. Løser vi for dette finner vi at $e^{at} = \frac{b}{b - \frac{a}{x_0}}$, som gir at $t = -\frac{1}{a}\ln(1 - a/(bx_0))$. Videre er $b - \frac{a}{x_0} > 0$ det samme som at $b > \frac{a}{x_0}$, som er det samme som at $x_0 > \frac{a}{b}$. Med $k_0 = \frac{a}{b}$ har vi altså at hvis $x_0 > k_0$ så vil populasjonen vokse over alle grenser når $t \to -\frac{1}{a}\ln(1 - a/(bx_0))$. Hvis $x_0 < k_0$ kan vi aldri få null i nevneren, og nevneren går mot uendelig, slik at populasjonen dør ut i dette tilfellet.

d)

Hvis fiskepopulasjonen skal holde seg konstant lik x_0 må vi ha at $\frac{dx}{dt} = 0$. Da må $bx^2 - ax - c = 0$, slik at $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4bc}}{2b}$. Her er det bare $x = \frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b}$ som er interessant (den andre er negativ). Vi må altså ha at $x(t) = x_0 = \frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b}$ for alle t. Løser vi for c finner vi at $c = c_0 = \frac{(2bx_0-a)^2-a^2}{4b}$.

Oppgave 10.4.13

a)

Nullpunkter for h har vi kun når $t = 0$. Vi har at $h'(t) = -0.1e^{-0.1t} + 0.5e^{-0.5t}$. Setter vi dette lik 0 får vi at $e^{-0.1t} = 5e^{-0.5t}$, som gir at $-0.1t = -0.5t + \ln 5$, slik at $t = \frac{5}{2}\ln 5$. Det er klart at dette må være et maksimumspunkt, og at

$$h(\frac{5}{2}\ln 5) = e^{-0.25\ln 5} - e^{-1.25\ln 5} = 5^{-0.25} - 5^{1.25} \approx 0.5350$$

Vi har også at $h''(t) = 0.1^2 e^{-0.1t} - 0.5^2 e^{-0.5t}$. $h''(t) = 0$ gir at $e^{-0.1t} = 25e^{-0.5t}$, som gir at $-0.1t = -0.5t + 2\ln 5$, slik at $t = 5\ln 5$.

c)

Vi ser først at $f(t) = Ce^{-kt}$. Siden $f(0) = 10$ må vi ha at $C = 10$, slik at $f(t) = 10e^{-kt}$. Den andre likningen blir nå $g'(t) + lg(t) = 10ke^{-kt}$. Løser vi denne som en førsteordens lineær differensiallikning finner vi at

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-lt}\left(\int e^{lt}10ke^{-kt}dt + C\right) = e^{-lt}\left(\frac{10k}{l-k}e^{(l-k)t}dt + C\right) \\ &= \frac{10k}{l-k}e^{-kt} + Ce^{-lt}. \end{aligned}$$

$g(0) = 0$ gir at $0 = \frac{10k}{l-k} + C$, slik at $C = \frac{10k}{k-l}$. Vi får derfor $g(t) = \frac{10k}{l-k}(e^{-kt} - e^{-lt})$.

d)

Vi har her at $g(t) = \frac{5}{2}(e^{-0.1t} - e^{-0.5t}) = \frac{5}{2}h(t)$. Kl 1700 har det gått 10 timer, og da er $g(10) = \frac{5}{2}(e^{-1} - e^{-5}) = 0.9029$.

e)

Hvis vi endrer initialkravet til $f(0) = A$ får vi at $f(t) = Ae^{-kt}$, og $g(t) = \frac{0.1A}{0.4}(e^{-0.1t} - e^{-0.5t}) = \frac{1}{4}Ah(t)$. Maksimumsverdien her er $\frac{1}{4}A \times 0.5350$. For at denne skal være mindre enn 5 må vi ha at $A < \frac{20}{0.5350} = 37.3837$.