Fasit til oppgaver dere har spurt om, som ikke ble tatt på plenumsregning 14/11

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

November 18, 2011

Oppgave 14.3.4

Setter vi inn $x'(t) = f(t, x(t))$ i approksimasjonen får vi at $f(t, x) \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$, som kan skrives $x(t+h)-x(t) \approx hf(t, x(t))$, som betyr at $x(t+h)(t)+hf(t, x(t))$. Høyre side her svarer til et steg i Eulers metode.

Oppgave 14.6.4

a)

Vi får at

$$x''(t) = 2t + 3x^2x'(t) - x'(t) = 2t + (3x^2 - 1)(t^2 + x^3 - x).$$

b)

Et steg i kvadratisk Taylor blir her

$$x_{k+1} = x_k + h(t_k^2 + x_k^3 - x_k) + \frac{h^2}{2}(2t_k + (3x_k^2 - 1)(t_k^2 + x_k^3 - x_k))$$

Et steg med kvadratisk Taylor gir dermed $x_1 = 1+(1^3-1)+\frac{1}{2}((3-1)(1^3-x)) = 1$. Ser vi nærmere på utregningen er det klart at første steg med Kvadratisk Taylor gir $x_1 = 1$, uansett hva h er. Bruker vi flere steg blir det neste steget

$$x_2 = x_1+h(t_1^2+x_1^3-x_1)+\frac{h^2}{2}(2t_1+(3x_1^2-1)(t_1^2+x_1^3-x_1)) = 1+ht_1^2+\frac{h^2}{2}(2t_1+2t_1^2)$$

Hvis $h = 0.5$ får vi at $x_2 = 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}(1+\frac{1}{2}) = 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{21}{16} \approx 1.3125$. Hvis $h = 0.2$ får vi at på samme måte at de neste stegene blir 1.0176, 1.08109021746, 1.24076835064, 1.62941067817.

c)

Følgende Pythonkode implementererKvadratisk Taylor for 10 steg:

```
xk=1
tk=0
N=10
h=1.0/N
for k in range(N):
  xk=xk+h*(tk**2+xk**3-xk) + (h**2/2)*(2*tk+(3*xk**2-1)*(tk**2+xk**3-xk))
  tk=tk+h
print xk
```

Kjører vi koden får vi at tilnærmingen $x(1) \approx 1.787456775$ Bytter vi ut N med 100 eller 1000 får viistedet tilnærmingene 1.90739098078, og 1.9095983769.

Oppgave 14.7.1

a)

Ett steg med Eulers metode:

$$x_1 = x_0 + x_0 = 2.$$

b)

Ett steg med kvadratisk Taylor:

$$x_1 = x_0 + x_0 + \frac{1}{2}x_0 = 2.5$$

c)

Ett steg med Eulers midtpunktsmetode:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= x_0 + \frac{1}{2}x_0 = \frac{3}{2} \\ x_1 &= x_0 + x_{1/2} = \frac{5}{2} = 2.5. \end{aligned}$$

d)

Med Runge-Kuttas metode får vi

$$
\begin{aligned}
k_0 &= 1\\
k_1 &= 1 + \frac{k_0}{2} = 1.5\\
k_2 &= 1 + \frac{k_1}{2} = 1.75\\
k_3 &= 1 + 1.75 = 2.75\\
x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) = 1 + \frac{1}{6}(1 + 3 + 3.5 + 2.75) \approx 2.7083.
\end{aligned}
$$

e)

Med to steg i Runge-Kuttas metode får vi

$$
\begin{aligned}
k_0 &= 1\\
k_1 &= 1 + \frac{k_0}{4} = 1.25\\
k_2 &= 1 + \frac{k_1}{4} = 1.3125\\
k_3 &= 1 + 0.60625 = 1.6025\\
x_1 &= x_0 + \frac{1}{12}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \approx 1.6440\\
k_0 &= x_1 = 1.6440\\
k_1 &= x_1 + \frac{k_0}{4}\\
k_2 &= x_1 + \frac{k_1}{4}\\
k_3 &= x_1 + \frac{k_2}{2}\\
x_2 &= x_1 + \frac{1}{12}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \approx 2.7100
\end{aligned}
$$

f)

Kode som kjører Runge-Kutta med 10 steg kan se slik ut:

```
xk=1
N=10
h=1.0/N
for k in range(N):
  k0=xk
  k1=xk+h*k0/2
  k2=xk+h*k1/2
```

```
  k3=xk+h*k2
  xk=xk+h*(k0+2.0*k1+2.0*k2+k3)/6
print xk
```

Kjører vi denne får vi 2.71827974414. Endrer vi N til $100, 1000, 10000$ får vi 2.71828182823, 2.71828182846, og 2.71828182846.

g)

Det ser ut som verdiene konvergerer mot e.

h)

Likningen er førsteordens med lineære koeffisienter, og vi ser at løsningen er $x(t) = e^t$, og da har vi jo at $x(1) = e$.

Oppgave 14.7.2

a)

Eulers metode tar her formen $x_{k+1} = x_k + h(-x_k \sin t_k + \sin t_k)$.

b)

Eulers midtpunktsmetode tar formen

$$
\begin{aligned}
x_{k+1/2} &= x_k + \frac{h}{2}(-x_k \sin t_k + \sin t_k) \\
x_1 &= x_k + h(-x_{k+1/2} \sin(t_k + h/2) + \sin(t_k + h/2))
\end{aligned}
$$

Kode som kjører de to metodene for et gitt natall steg, og skriver ut resultatet:

```
from math import *

xk=2.0+exp(1)
tk=0.0
N=10
h=2.0*pi/N
for k in range(N):
  xk=xk+h*(-xk*sin(tk)+sin(tk))
  tk=tk+h
print xk

xk=2+exp(1)
tk=0.0
for k in range(N):
  xkhalf=xk+h*(-xk*sin(tk)+sin(tk))/2.0
  xk=xk+h*(-xkhalf*sin(tk+h/2.0)+sin(tk+h/2.0))
print xk
```

c)

Denne differensiallikningen er separabel, og man kan vise at løsningen er på formen $1 + De^{\cos(t)}$. Spesielt er løsningen periodisk med periode 2π, slik at løsningen bør oppfylle $x(2\pi) = 2 + e$. Kjører vi koden for forskjellige N vil du se at det er først for N større enn 1000 at vi begynner å nærme oss her, slik at vi ikke kan si noe som helst for så små verdier for N som de gitt i oppgaven.