Induksjonsprinsippet.

Hva er $\sum_{i=1}^{n} i$?

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3$, $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$

$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$, $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$

$\sum_{i=1}^{1000} i$?, $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$?

Er denne relasjonen sann for alle $n \in \mathbb{N}$? Uendelig mange ting å sjekke.

Sett $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, $S(1) = 1$, $S(2) = 3$

$S(3) = 6$, $S(4) = 10$

$S(5) = 15$

Med andre ord stemmer formelen $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

for $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Vi sjekker litt mer systematisk. $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad , \quad S(1) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{i=1}^{1} i + 2 = 1+2 = 3 \qquad , \quad S(2) = 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = 3+3=6 \qquad , \quad S(3) = 6$$

$$\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = 6+4=10 \qquad , \quad S(4) = 10$$

Anta at vi fortsetter dette og finner at formelen stemmer for

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, k$

Vil det da også stemme for $n = k+1$?

Vi sjekker for $n = k+1$: (Skal vise at $\sum_{i=1}^{k+1} i = S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)$$

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + \frac{2}{2}\right)$$

$$= (k+1) \cdot \frac{1}{2}(k+2) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Altså stemmer og så formelen for $n = k+1$ hvis den stemmer for $n = k$

Oppsummert:

$1, 2, 3, 4, 5, 6 \,-\,-\,-\, k, k+1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \,-\,-\,-$

Vi sjekket $n = 1, 2, 3, 4, 5$ manuelt

Sett $n = k = 5$. Da viser argument over at formelen også må stemme for $n = k+1 = 6$. Men da kan vi sette $n = k = 6$ og argumentet gir oss at formelen stemmer for

$n = k+1 = 7$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \,-$

$-\,-\,-\,-\quad 1000, 1001, 1002, \,-\,-\,-$

Induksjonsprinsippet.

Anta at vi har utsagnene P_n, $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$. For å bevise at P_n er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ kan vi gjøre følgende:

1. Sjekk om P_1 er sann.

2. Anta at P_k er sann ($P_1, P_2, \ldots, P_k$) og bruk dette til å vise at P_{k+1} er sann.

I vårt tilfelle: P_n: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=2}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = ?$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$

Oppgave.

Vis at uttrykket $n(n^2+5)$ er delig med 6 for alle naturlige tall n.

$n=1$, Da er $n(n^2+5) = 1\cdot(1^2+5)$
$= 6$ OK

$n=2$, Da er $n(n^2+5) = 2(2^2+5)$
$= 18$. OK

$n=3$, $n(n^2+5) = 3(9+5) = 3\cdot 14 = 42$

Anta at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 når $n=k$, må vi se at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 når $n=k+1$.

Altså: anta at $k(k^2+5)$ er delelig med 6, må vise at da er og så $(k+1)((k+1)^2+5)$ delelig med 6. Vet at $k(k^2+5)$ er delelig med 6

$$(k+1)((k+1)^2+5) = (k+1)(k^2+2k+1+5)$$
$$= k(k^2+5) + k(2k+1) + k^2+2k+6$$
$$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$$
$$= k(k^2+5) + 3(k^2+k+2)$$

k^2+k+2 er alltid et partall!

i) k er et partall: Da er $k=2m$ for et naturlig tall m.

$$k^2+k+2 = (2m)^2 + 2m + 2 = 4m^2+2m+2 = 2(2m^2+m+1)$$

som vi ser er et partall.

ii) k er et oddetall: $k=2m+1$ for en $m \in \mathbb{N}$

$$k^2+k+2 = (2m+1)^2 + (2m+1) + 2$$
$$= 4m^2+4m+1+2m+1+2$$
$$= 4m^2+6m+4 = 2(2m^2+3m+2)$$

opplagt partall.